المعاصر

في

الرياضيات البحتة

التفاضل والتكامل

للصف 3 الثانوى

إعداد

نخبة من خبراء التعليم

مكتبة الطلبة
للطبع و النشر و التوزيع
٣ شارع كامل صدقي-الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤١٢

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشئون الفنية - دار الكتب المصرية

المعاصر فى الرياضيات البحتة : التفاضل والتكامل / إعداد نخبة من خبراء التعليم.-
القاهرة : مكتبة الطلبة للطبع والنشر والتوزيع ، ٢٠١٨.
٣ مج ؛ ٢٤ سم.
للصف الثالث الثانوى
المحتويات : جـ٢. بوكليت التقويم المستمر. -
جـ٣. (الجزء الخاص بالإجابات)
تـدمك : ٣ - ١١٨ - ٨٣٩ - ٩٧٧ - ٩٧٨
١ - الرياضيات - تعليم وتدريس
٢ - التعليم الثانوى

٥١٠,٧

رقم الإيداع : ١١٣٦٧ / ٢٠١٨

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذى وفقنا لتقديم هذا الكتاب من مجموعة كتب «المعاصر» فى الرياضيات... نقدمه إلى أبنائنا الطلبة آملين أن يجدوا فيه المعلم والموجه الذى يعينهم على فهم كل صعب، ويذلل أمامهم كل مغلق وغامض، ويأخذ بأيديهم إلى طريق النجاح والتفوق.

ونقدمه إلى إخواننا المدرسين ليكون لهم عونًا على أداء رسالتهم الشاقة، ونافذة يطلون منها على خبرات إخوة لهم أمضوا قرابة الثلاثين عامًا فى حقل التدريس والتوجيه.

ونحن لن نلجأ - فى هذا التقديم - إلى تقييم عملنا وجهدنا من خلال سرد لمزايا هذا الكتاب وما استحدث فيه، ولكننا نترك ذلك لكل من يطوى صفحة منه أو يقرأ سطرًا فيه، لكى يبدى فيه رأيًا ... إن كان نقدًا فنحن نرحب به ... وإن كانت كلمة ثناء فهى خير مقابل نرجوه، وأعز وسام نضعه على صدورنا.

والله لا يضيع أجر من أحسن عملاً، وهو ولى التوفيق،

« المؤلفون »

محتويات الكتاب

مراجعة على ما سبقت دراسته ٥

الوحدة 1 الاشتقاق وتطبيقاته. ١٣

الوحدة 2 تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية. ١٢٢

الوحدة 3 سلوك الدالة ورسم المنحنيات. ١٧٧

الوحدة 4 التكامل المحدد وتطبيقاته. ٢٩٦

مراجعة على ما سبقت دراسته

أهم قوانين حساب المثلثات

* **العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية :**

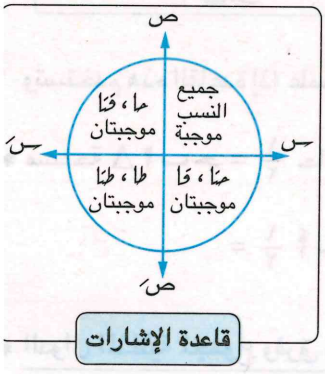
① $\text{جتا}^{٢}\,هـ + \text{جا}^{٢}\,هـ = ١$

② $١ + \text{طا}^{٢}\,هـ = \text{قا}^{٢}\,هـ$

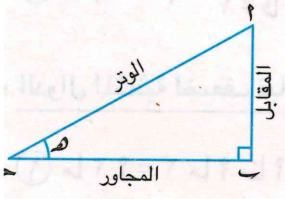
③ $١ + \text{طتا}^{٢}\,هـ = \text{قتا}^{٢}\,هـ$

④ $\text{جا}\,هـ \times \text{قتا}\,هـ = ١$ ، $\text{جتا}\,هـ \times \text{قا}\,هـ = ١$ ، $\text{طا}\,هـ \times \text{طتا}\,هـ = ١$

⑤ $\text{طا}\,هـ = \dfrac{\text{جا}\,هـ}{\text{جتا}\,هـ}$ ، $\text{طتا}\,هـ = \dfrac{\text{جتا}\,هـ}{\text{جا}\,هـ}$



* **تذكر العلاقات الآتية :**



① $\text{جا}\,هـ = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$

② $\text{جتا}\,هـ = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \dfrac{\text{ب ح}}{\text{أ ح}}$

③ $\text{طا}\,هـ = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}}$

* **قاعدة الجيب :**

فى أى مثلث أ ب ح يكون : $\dfrac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{ح}}{\text{جا ح}} = ٢ \text{ نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب ح

* **قاعدة جيب التمام :**

فى أى مثلث أ ب ح يكون :

$\text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢} + \text{ح}^{٢} - ٢\,\text{ب ح جتا أ}$

$\text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ح}^{٢} - ٢\,\text{أ ح جتا ب}$

$\text{ح}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - ٢\,\text{أ ب جتا ح}$

ونستخدم هذه القاعدة إذا علم طولا ضلعين فى مثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مما سبق نستنتج ما يلى :

$$\text{جتا } أ = \frac{ب^2 + جـ^2 - أ^2}{2 ب جـ} \quad ، \quad \text{جتا } ب = \frac{أ^2 + جـ^2 - ب^2}{2 أ جـ} \quad ، \quad \text{جتا } جـ = \frac{أ^2 + ب^2 - جـ^2}{2 أ ب}$$

وتستخدم هذه القاعدة إذا علمت أطوال أضلاع المثلث الثلاثة أو النسبة بين أطوال هذه الأضلاع.

* مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

$$= \frac{1}{2} أ ب \text{ جا } جـ = \frac{1}{2} أ جـ \text{ جا } ب = \frac{1}{2} ب جـ \text{ جا } أ$$

* الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين :

① $\text{جتا } (أ \pm ب) = \text{جتا } أ \text{ جتا } ب \mp \text{جا } أ \text{ جا } ب$

② $\text{جا } (أ \pm ب) = \text{جا } أ \text{ جتا } ب \pm \text{جتا } أ \text{ جا } ب$

③ $\text{ظا } (أ \pm ب) = \frac{\text{ظا } أ \pm \text{ظا } ب}{1 \mp \text{ظا } أ \text{ ظا } ب}$

* الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية :

① $\text{جا } 2أ = 2 \text{ جا } أ \text{ جتا } أ$

② $\text{جتا } 2أ = \text{جتا}^2 أ - \text{جا}^2 أ$

$= 2 \text{ جتا}^2 أ - 1$

$= 1 - 2 \text{ جا}^2 أ$

③ $\text{ظا } 2أ = \frac{2 \text{ ظا } أ}{1 - \text{ظا}^2 أ}$

① $\text{جا } أ = 2 \text{ جا } \frac{أ}{2} \text{ جتا } \frac{أ}{2}$

② $\text{جتا } أ = \text{جتا}^2 \frac{أ}{2} - \text{جا}^2 \frac{أ}{2}$

$= 2 \text{ جتا}^2 \frac{أ}{2} - 1$

$= 1 - 2 \text{ جا}^2 \frac{أ}{2}$

③ $\text{ظا } أ = \frac{2 \text{ ظا } \frac{أ}{2}}{1 - \text{ظا}^2 \frac{أ}{2}}$

أهم قوانين النهايات

① $\lim_{س \to ا} \frac{س^{ن} - ا^{ن}}{س - ا} = ن ا^{ن-١}$

② $\lim_{س \to ا} \frac{س^{ن} - ا^{ن}}{س^{م} - ا^{م}} = \frac{ن}{م} ا^{ن-م}$

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ا)^{ن} - ا^{ن}}{س} = ن ا^{ن-١}$

④ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} = ١$ وأيضًا $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = ١$ حيث س بالقياس الدائرى.

⑤ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ا س}{ب س} = \frac{ا}{ب}$ وأيضًا $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ا س}{ب س} = \frac{ا}{ب}$ حيث س بالقياس الدائرى.

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س}$ = صفر حيث س بالقياس الدائرى.

الاتصال وقابلية الاشتقاق

① يقال أن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ا (حيث ا ∈ مجال د)

إذا وفقط إذا كانت د′ (ا) لها وجود حيث د′ (ا) = $\lim_{ه \to ٠} \frac{د (ا + ه) - د (ا)}{ه}$

② إذا كان ا ∈ مجال د :

وكان:
- د′ (ا⁺) = د′ (ا⁻) ← فإن: الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ا ويكون د′ (ا) = د′ (ا⁺) = د′ (ا⁻)
- د′ (ا⁺) ≠ د′ (ا⁻) ← فإن: الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = ا

③ إذا كانت الدالة د غير متصلة عند نقطة ما فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

④ (إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ا فإنها تكون متصلة عند س = ا)

ولكن العكس غير صحيح بمعنى أنه (إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ا فليس من الضرورى أن تكون قابلة للاشتقاق عند س = ا)

(٥) إذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة تنتمى إلى الفترة] حـ ، ء [
نقول أن الدالة د قابلة للاشتقاق فى هذه الفترة.

(٦) أى دالة كثيرة حدود تكون قابلة للاشتقاق على ح

(٧) تكون الدالة د المعرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا كان كل من دَ (أ+) ، دَ (ب-) له وجود ، وكانت د قابلة للاشتقاق على الفترة] أ ، ب [

(٨) المشتقة الأولى للدالة د عند النقطة (أ ، د (أ)) = دَ (أ)

= معدل تغير الدالة د عند النقطة (أ ، د (أ))

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ (بشرط وجود النهاية)

= ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (أ ، د (أ))

قواعد الاشتقاق

(١) إذا كانت : د (س) = أ (حيث أ ثابت) فإن : دَ (س) = صفر

(٢) إذا كانت : ص = [أ د (س)] (حيث أ ثابت) فإن : صَ = أ دَ (س)

(٣) إذا كانت : ص = $س^{ن}$ (حيث ن ∈ ح) فإن : صَ = ن $س^{ن-١}$

(٤) إذا كانت : ص = د (س) ± ر (س) فإن : صَ = دَ (س) ± رَ (س)

(٥) إذا كانت : ص = د (س) × ر (س)

فإن : صَ = د (س) × رَ (س) + ر (س) × دَ (س)

أى أن : صَ = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى

(٦) إذا كانت : ص = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ فإن : صَ = $\frac{ر(س) \times دَ(س) - د(س) \times رَ(س)}{(ر(س))^{٢}}$

أى أن : صَ = $\frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^{٢}}$

حيث المقام : ر (س) ≠ ٠

(٧) قاعدة السلسلة :

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع ، ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : ص = (د ∘ ر) (س) = د [ر (س)] تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

ويكون : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$

أى أن : $\frac{ء}{ء س}$ [(د ∘ ر) (س)] = $\frac{ء}{ء س}$ [د (ر (س))] = د′ (ر (س)) × ر′ (س)

(٨) إذا كانت : ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{ء}{ء س}$ (ص^{ن}) = ن ص$^{ن-١} \frac{ء ص}{ء س}$

(٩) إذا كانت : ص = [د (س)]^{ن} فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ن [د (س)]$^{ن-١}$ × د′ (س)

أى أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ن (القوس)$^{ن-١}$ × مشتقة ما بداخل القوس

(١٠) إذا كانت : ص = $\sqrt{د (س)}$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{٢ \sqrt{د (س)}} \times$ د′ (س)

أى أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{٢ \text{ (الجذر)}} \times$ مشتقة ما تحت الجذر

(١١) اشتقاق الدوال المثلثية : (حيث س بالتقدير الدائرى)

* إذا كانت : ص = جا س فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = جتا س
* إذا كانت : ص = جتا س فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = − جا س
* إذا كانت : ص = ظا س فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = قا^{٢} س

وبصفة عامة

(١) إذا كانت : ص = جا د (س) فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = د′ (س) جتا د (س)

(٢) إذا كانت : ص = جتا د (س) فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = − د′ (س) جا د (س)

(٣) إذا كانت : ص = ظا د (س) فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = د′ (س) قا^{٢} د (س)

التطبيقات الهندسية

ميل الخط المستقيم :

① ميل الخط المستقيم الذى معادلته : أ س + ب ص + حـ = ٠ هو $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

② ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) هو $\frac{\text{ص٢ - ص١}}{\text{س٢ - س١}}$

③ ميل المستقيم = ظا هـ

حيث (هـ) قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

④ إذا كان : $\overleftarrow{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

⑤ ميل المستقيم يكون موجبًا إذا كان يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

⑥ ميل المستقيم يكون سالبًا إذا كان يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

⑦ ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر

⑧ ميل محور الصادات = ميل أى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) = $\frac{١}{\text{صفر}}$ «غير معرف»

العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين :

إذا كان : ل١ ، ل٢ مستقيمين ميلاهما م١ ، م٢ على الترتيب فإن :

① ل١ // ل٢ ⟺ م١ = م٢

② ل١ ⊥ ل٢ ⟺ م١ × م٢ = -١ (ما لم يوازى أحدهما أحد المحورين)

معادلة الخط المستقيم :

① بدلالة نقطة واقعة عليه (س١ ، ص١) وميله (م) هى : (ص - ص١) = م (س - س١)

② بدلالة الميل (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات (حـ) هى : ص = م س + حـ

③ بدلالة الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات هى : $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$

ملاحظـــات

① معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى : ص = ك

② معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى : س = ل

③ معادلة محور السينات هى : ص = ٠

④ معادلة محور الصادات هى : س = ٠

⑤ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل هى : ص = م س

⑥ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س

⑦ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

⑧ لإيجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما آنيًا.

معادلتا المماس والعمودى عليه لمنحنى :

إذا كانت $(س_١ ، ص_١)$ نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث :

ص = د (س) ، م ميل المماس عند هذه النقطة أى م = $\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{(س_١ ، ص_١)}$ فإن :

* معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ هى :

$$ص - ص_١ = م (س - س_١)$$

* معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ هى :

$$ص - ص_١ = \frac{-١}{م} (س - س_١)$$

أهم قواعد التكامل

① $\int ا \, ء س = ا س + ث$

② $\int [د (س) \pm ر (س)] \, ء س = \int د (س) \, ء س \pm \int ر (س) \, ء س$

③ $\int س^{ن} \, ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ حيث $ن \neq -١$

④ $\int (ا س + ب)^{ن} \, ء س = \frac{(ا س + ب)^{ن+١}}{ا \times (ن+١)} + ث$ حيث $ن \neq -١$

⑤ $\int (د (س))^{ن} \, د' (س) \, ء س = \frac{(د (س))^{ن+١}}{ن+١} + ث$ حيث $ن \neq -١$

⑥ * $\int$ جا س ء س $= -$ جتا س $+ ث$

* $\int$ جتا س ء س $=$ جا س $+ ث$

* $\int$ قا^{٢} س ء س $=$ ظا س $+ ث$

⑦ * $\int$ جا $(ا س + ب) \, ء س = \frac{-١}{ا}$ جتا $(ا س + ب) + ث$

* $\int$ جتا $(ا س + ب) \, ء س = \frac{١}{ا}$ جا $(ا س + ب) + ث$

* $\int$ قا^{٢} $(ا س + ب) \, ء س = \frac{١}{ا}$ ظا $(ا س + ب) + ث$

ملاحظات

① جا^{٢} س $= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}$ جتا ٢ س

② جتا^{٢} س $= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}$ جتا ٢ س

③ $\frac{ء}{ء س} \int د (س) \, ء س = د (س)$ بينما $\int \frac{ء}{ء س} [د (س)] \, ء س = د (س) + ث$

فمثلاً : $\frac{ء}{ء س} \int س^{٥} \, ء س = س^{٥}$ بينما $\int \frac{ء}{ء س} (س^{٥}) \, ء س = س^{٥} + ث$

الوحدة

1

الاشتقاق وتطبيقاته

الدرس الأول: اشتقاق الدوال المثلثية.

الدرس الثانى: الاشتقاق الضمنى والبارامترى.

الدرس الثالث: المشتقات العليا للدالة.

الدرس الرابع: معادلتا المماس والعمودى لمنحنى.

الدرس الخامس: المعدلات الزمنية المرتبطة.

الدرس 1

اشتقاق الدوال المثلثية

درسنا فيما سبق اشتقاق الدوال المثلثية الأساسية وكانت كالآتى :

① إذا كانت : ص = جا س	فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = جتا س
② إذا كانت : ص = جتا س	فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = − جا س
③ إذا كانت : ص = ظا س	فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٢} س

وفيما يلى سوف نتعرف على اشتقاق مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية :

① إذا كانت : ص = ظتا س	فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = − قتا^{٢} س
② إذا كانت : ص = قا س	فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = قا س ظا س
③ إذا كانت : ص = قتا س	فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = − قتا س ظتا س

البرهان :

① دالة ظل التمام ص = ظتا س

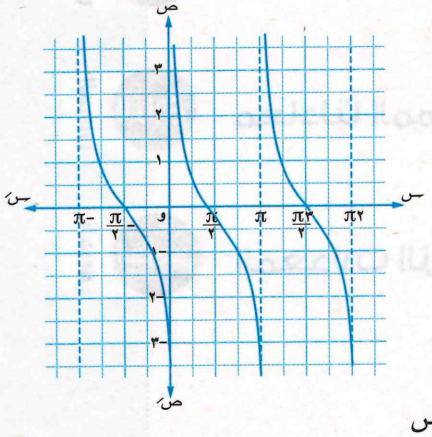
حيث : س ∈ ح ، س ≠ ن π

، ن ∈ ص

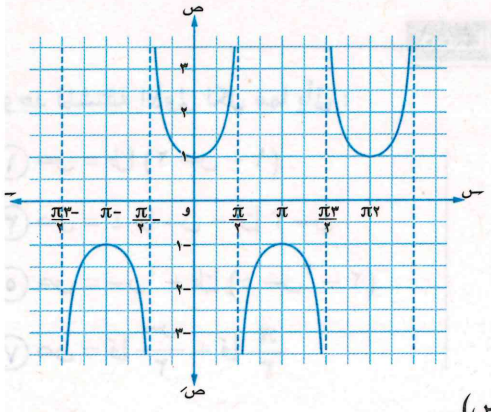
∵ ص = ظتا س = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{\text{جا س} \times (-\text{جا س}) - \text{جتا س} \times \text{جتا س}}{\text{جا}^{٢} \text{س}}$

= $\frac{-\text{جا}^{٢} \text{س} - \text{جتا}^{٢} \text{س}}{\text{جا}^{٢} \text{س}}$ = $\frac{-١}{\text{جا}^{٢} \text{س}}$ = − قتا^{٢} س



② دالة القاطع ص = قا س



حيث : س ∈ ح

، $س \neq \frac{\pi (١ + ن ٢)}{٢}$

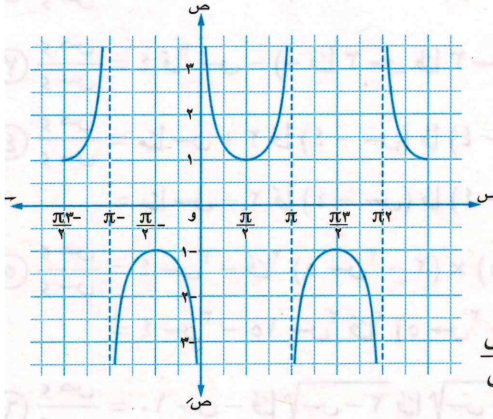
، ن ∈ ص

∵ ص = قا س = $\frac{١}{\text{جتا س}}$

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{جتا س} \times \text{صفر} - ١ \times (-\text{جا س})}{\text{جتا}^{٢} \text{س}}$

$= \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^{٢} \text{س}} = \frac{١}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} =$ قا س ظا س

③ دالة قاطع التمام ص = قتا س



حيث : س ∈ ح ، $س \neq ن \pi$

، ن ∈ ص

∵ ص = قتا س = $\frac{١}{\text{جا س}}$

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{جا س} \times \text{صفر} - ١ \times \text{جتا س}}{\text{جا}^{٢} \text{س}}$

$= \frac{-\text{جتا س}}{\text{جا}^{٢} \text{س}} = \frac{-١}{\text{جا س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

$=$ − قتا س ظتا س

وبصفة عامة

① إذا كانت : ص = ظتا ع فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = (-\text{قتا}^{٢} \text{ع}) \cdot \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$

② إذا كانت : ص = قا ع فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = (\text{قا ع ظا ع}) \cdot \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$

③ إذا كانت : ص = قتا ع فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = (-\text{قتا ع ظتا ع}) \cdot \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$

حيث ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = طا (٢ س − ١)

(٢) ص = قا (٣ س + ٥)

(٣) ص = ٤ طا س − ق٤ا ٣ س

(٤) ص = جا س + ٢ قا (٤ − س)

(٥) ص = س^{٤} + طا (٥ س^{٣} − ٢)

(٦) ص = ٥ س^{٢} + ق٤ا $\sqrt{س - ٢}$

(٧) ص = قا $\frac{س}{٣}$ + قا $\frac{\pi}{٣}$

(٨) ص = $\frac{١ - طا س}{١ + طا س}$

الحل

(١) $\frac{ء ص}{ء س}$ = − ق٤ا (٢ س − ١) × ٢ = −٢ ق٤ا (٢ س − ١)

(٢) $\frac{ء ص}{ء س}$ = قا (٣ س + ٥) طا (٣ س + ٥) × ٣ = ٣ قا (٣ س + ٥) طا (٣ س + ٥)

(٣) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٤ قا^{٢} س − (− ق٤ا ٣ س طا ٣ س) × ٣ = ٤ قا^{٢} س + ٣ ق٤ا ٣ س طا ٣ س

(٤) $\frac{ء ص}{ء س}$ = جا س + ٢ قا (٤ − س) طا (٤ − س) × −١

= جا س − ٢ قا (٤ − س) طا (٤ − س)

(٥) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٤ س^{٣} − ق٤ا (٥ س^{٣} − ٢) × (١٥ س^{٢})

= ٤ س^{٣} − ١٥ س^{٢} ق٤ا (٥ س^{٣} − ٢)

(٦) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ١٠ س − ق٤ا $\sqrt{س - ٢}$ طا $\sqrt{س - ٢}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{س - ٢}}$

= ١٠ س − $\frac{ق٤ا \sqrt{س - ٢} \text{ طا } \sqrt{س - ٢}}{٢\sqrt{س - ٢}}$

(٧) $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٣}$ قا $\frac{س}{٣}$ طا $\frac{س}{٣}$ + صفر = $\frac{١}{٣}$ قا $\frac{س}{٣}$ طا $\frac{س}{٣}$

(٨) $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{(١ + طا س) \times (ق٤ا^{٢} س) - (١ - طا س)(- ق٤ا^{٢} س)}{(١ + طا س)^{٢}}$

= $\frac{ق٤ا^{٢} س (١ + طا س + ١ - طا س)}{(١ + طا س)^{٢}}$ = $\frac{٢ ق٤ا^{٢} س}{(١ + طا س)^{٢}}$

لاحظ أن

قا $\frac{\pi}{٣}$ = ٢ = مقدار ثابت

∴ المشتقة = صفر

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = طا ٦ س^{٣} + طا^{٣} ٦ س

(٢) ص = س^{٤} طا ٥ س

(٣) ص = (٥ − ٣ قتا س)^{٤}

(٤) ص = جا س قا ٣ س

(٥) ص = $\frac{\text{قتا } (٣ \text{ س} + ١)}{\text{طا } (٤ \text{ س} - ١)}$

(٦) ص = جا (قتا ٥ س^{٣})

الحل

(١) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = − قتا^{٢} ٦ س^{٣} × (١٨ س^{٢}) + ٣ طا^{٢} ٦ س × − قتا^{٢} ٦ س × ٦

= −١٨ س^{٢} قتا^{٢} ٦ س^{٣} − ١٨ طا^{٢} ٦ س قتا^{٢} ٦ س

(٢) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = س^{٤} × − قتا^{٢} ٥ س × ٥ + طا ٥ س × ٤ س^{٣}

= −٥ س^{٤} قتا^{٢} ٥ س + ٤ س^{٣} طا ٥ س

(٣) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٤ (٥ − ٣ قتا س)^{٣} × [٣ قتا س طا س]

= ١٢ قتا س طا س (٥ − ٣ قتا س)^{٣}

(٤) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = جا س × قا ٣ س طا ٣ س × ٣ + قا ٣ س جتا س

= ٣ جا س قا ٣ س طا ٣ س + قا ٣ س جتا س

(٥) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{طا } (٤ \text{ س} - ١) \times - \text{قتا } (٣ \text{ س} + ١) \text{ طتا } (٣ \text{ س} + ١) \times ٣ - \text{قتا } (٣ \text{ س} + ١) \times \text{قا}^{٢} (٤ \text{ س} - ١) \times ٤}{\text{طا}^{٢} (٤ \text{ س} - ١)}$

= $\frac{- ٣ \text{ طا } (٤ \text{ س} - ١) \text{ قتا } (٣ \text{ س} + ١) \text{ طتا } (٣ \text{ س} + ١) - ٤ \text{ قتا } (٣ \text{ س} + ١) \text{ قا}^{٢} (٤ \text{ س} - ١)}{\text{طا}^{٢} (٤ \text{ س} - ١)}$

(٦) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = جتا (قتا ٥ س^{٣}) × − قتا ٥ س^{٣} طتا ٥ س^{٣} × ١٥ س^{٢}

= −١٥ س^{٢} قتا ٥ س^{٣} طتا ٥ س^{٣} جتا (قتا ٥ س^{٣})

مثال ٣

إذا كانت : ص = $\sqrt{١٤ - ٥ ع}$ ، ع = طا ٢ س

أثبت أن : $٣ \frac{ء ص}{ء س} - ١٠ =$ صفر عند س = $\frac{\pi}{٨}$

الحل

$\because \frac{ء ص}{ء ع} = \frac{-٥}{٢ \sqrt{١٤ - ٥ ع}}$ ، $\frac{ء ع}{ء س} = -٢$ قا^{٢} ٢ س

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س} = \frac{-٥}{٢ \sqrt{١٤ - ٥ ع}} \times -٢$ قا^{٢} ٢ س

$= \frac{٥ \text{ قا}^{٢} ٢ س}{\sqrt{١٤ - ٥ ع}}$ وبالتعويض عن ع

$= \frac{٥ \text{ قا}^{٢} ٢ س}{\sqrt{١٤ - ٥ \text{ طا} ٢ س}}$

$\therefore \left[\frac{ء ص}{ء س} \right]_{س = \frac{\pi}{٨}} = \frac{٥ \text{ قا}^{٢} \frac{\pi}{٤}}{\sqrt{١٤ - ٥ \text{ طا} \frac{\pi}{٤}}} = \frac{١٠}{٣}$

$\therefore ٣ \frac{ء ص}{ء س} - ١٠ = ٣ \times \frac{١٠}{٣} - ١٠ =$ صفر

مثال ٤

إذا كانت : ص = قا^{ن} س أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} +$ ن ص طا س = ٠

الحل

$\because$ ص = قا^{ن} س = (قا س)^{ن}

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} =$ ن (قا س)$^{ن-١} \times$ (قا س طا س) = ن (قا س)^{ن} طا س

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} +$ ن قا^{ن} س طا س = ٠

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} +$ ن ص طا س = ٠

تمارين 1

على اشتقاق الدوال المثلثية

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = طا ٥ س

(٢) ص = قتا ٢ س

(٣) ص = قا ٧ س

(٤) ص = طا $\frac{١}{٣}$ س

(٥) ص = قتا $\frac{س}{٢}$

(٦) ص = قا $\frac{٣}{٤}$ س

(٧) ص = قا (٥ س + ٢)

(٨) ص = قتا (π − ٢ س)

(٩) ص = طا (س^{٢} + ٣)

(١٠) ص = قا (١ − س^{٢})

(١١) ص = س + طا ٢ س

(١٢) ص = $\sqrt{س^{٣}}$ + قا ٥ س

(١٣) ص = طا $\left(\frac{١}{٢}\ س^{٤}\right)$

(١٤) ص = قتا $\left(\sqrt{س}\right)$

(١٥) ص = قا (٣ س^{٤} + ٢ س^{٢} − ١)

(١٦) ص = طا $\left(\pi - \frac{١}{س}\right)$

(١٧) ص = ٣ س^{٥} + ٤ طا س

(١٨) ص = س^{٤} − ٣ قا (س − ٢)

(١٩) ص = جتا ٢ س − ٥ طا ٣ س

(٢٠) ص = ٣ قا ٢ س + ٢ قتا ٣ س

(٢١) ص = جتا س + ٤ قا س

(٢٢) ص = قتا (π + ٢ س) + طا ٣ س

(٢٣) ص = س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ٢ طا $\left(\frac{١}{\sqrt{س}}\right)$

(٢٤) ص = قا $\frac{س}{٤}$ + قا $\frac{\pi}{٤}$

(٢٥) ص = قا $\sqrt{س - ٢}$

(٢٦) ص = ٣ قتا $\left(\sqrt{١ + س^{٢}}\right)$

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = س قا ٣ س

(٢) ص = س^{٢} طا ٣ س

(٣) ص = س^{٣} قتا س

(٤) ص = جا س قا ٣ س

(٥) ص = قا س طا ٢ س

(٦) ص = س^{٢} قا ٥ س

(٧) ص = قتا س طا س

(٨) ص = قتا ٢ س قا ٣ س

(٩) ص = (س^{٢} + ٥ س + ٦) قا س

(١٠) ص = س^{٢} طا س + س^{٣} طا س

(١١) $ص = ق\text{ا}س^{٢}\ ط\text{ا}س^{٢}$

(١٢) $ص = س^{٢}\ ق\text{ا}\frac{١}{س}$

(١٣) $ص = (٣س + ٤)(٥س + ق\text{ت}\text{ا}س)$

(١٤) $ص = \sqrt{س}\ ق\text{ا}\sqrt{س}$

(١٥) $ص = (\sqrt{س} + ق\text{ت}\text{ا}س)\ ط\text{ا}س$

(١٦) $ص = س^{٢}\ جتا س\ ط\text{ا}س$

٣ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى :

(١) $ص = \frac{ط\text{ا}س}{س}$

(٢) $ص = \frac{ق\text{ت}\text{ا}س}{س}$

(٣) $ص = \frac{٦ - س}{ق\text{ا}س}$

(٤) $ص = \frac{ط\text{ا}٣س}{٢س + ٣}$

(٥) $ص = \frac{ق\text{ت}\text{ا}٢س}{س^{٢}}$

(٦) $ص = \frac{١ - ق\text{ا}س}{١ + ق\text{ا}س}$

(٧) $ص = \frac{١ - ط\text{ا}س}{١ + ط\text{ا}س}$

(٨) $ص = \frac{ق\text{ا}س}{١ + ق\text{ا}س}$

(٩) $ص = \frac{ق\text{ت}\text{ا}(٣س + ١)}{ط\text{ا}(٤س - ١)}$

(١٠) $ص = \frac{١ - ط\text{ا}س}{١ + ق\text{ت}\text{ا}س}$

(١١) $ص = \frac{١ + ق\text{ا}س}{ط\text{ا}س + جتا س}$

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) $ص = ق\text{ت}\text{ا}^{٤}س$

(٢) $ص = ق\text{ا}^{٣}٢س$

(٣) $ص = ط\text{ا}^{٧}س$

(٤) $ص = ط\text{ا}^{٥}(٢س^{٢} + ٤س + ٧)$

(٥) $ص = ٣\ ق\text{ا}^{٢}(٢س + \pi)$

(٦) $ص = ق\text{ت}\text{ا}^{٢}(١ + ٣س^{٢})$

(٧) $ص = ط\text{ا}^{٣}\sqrt{س}$

(٨) $ص = جتا^{٢}٣س + ق\text{ا}^{٢}س$

(٩) $ص = س\ ط\text{ا}^{٢}س$

(١٠) $ص = س^{٣}\ ق\text{ا}^{٢}٣س$

(١١) $ص = \frac{ق\text{ا}^{٢}س}{س}$

(١٢) $ص = \frac{س}{ق\text{ت}\text{ا}^{٢}٢س}$

(١٣) ص = طتا ٧ س^{٢} + طتا^{٢} ٧ س

(١٤) ص = قا^{٣} ٢ س طا^{٣} ٢ س

(١٥) ص = $\sqrt{١ + \text{طتا س}}$

(١٦) ص = $\sqrt{\text{س} + \text{قا س}}$

(١٧) ص = $\sqrt{١ + \text{قتا س}}$

(١٨) ص = $\sqrt[٣]{\text{س} + \text{طتا س}}$

(١٩) ص = $\sqrt{\text{س}^{٣} + \text{طتا}^{٢} ٤ \text{س}}$

(٢٠) ص = $\sqrt{\dfrac{\text{قا س} - ١}{\text{قا س} + ١}}$

٥ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = (١ + طتا س)^{٢}

(٢) ص = (٣ − ٢ طتا س)^{٢}

(٣) ص = (قتا س + طتا س)$^{-١}$

(٤) ص = $\dfrac{١}{(\text{س} + \text{قتا س})^{٣}}$

(٥) ص = طا (طتا س)

(٦) ص = طتا (جتا ٣ س)

(٧) ص = قا (طا^{٢} س)

(٨) ص = قا^{٢} (طا س)

(٩) ص = جا (قتا ٣ س^{٢})

(١٠) ص = طا (قا س^{٢})

٦ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د (س) لكل مما يأتى عند النقطة المبينة :

(١) ص = قتا $\dfrac{\text{س}}{٢}$ ، عند س = $\dfrac{\pi}{٢}$ « $\dfrac{-١}{\sqrt{٢}}$

(٢) ص = ٢ طتا س + $\sqrt{٢}$ قا س ، عند س = $\dfrac{\pi}{٤}$ « −٢

(٣) ص = ٣ طا س − قتا^{٢} س ، عند س = $\dfrac{\pi ٣}{٤}$ « ٢

(٤) ص = ٣ طتا^{٥} س ، عند س = $\dfrac{\pi}{٤}$ « −٣٠

٧ أكمل ما يأتى :

(١) $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (٥ − ٢ طتا س)^{٣} = ...

(٢) $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (٢ طتا $\dfrac{\pi}{٤}$) = ...

(٣) $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [(قتا س − طتا س) (قتا س + طتا س)] = ...

(٤) $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [س^{٢} + $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (س + قا س)] = ...

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\frac{د}{د س}$ (جتا^{٢} س + جا^{٢} س) = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

② $\frac{د}{د س}$ (٢ جتا^{٢} س − ١) = ...

(أ) جا ٢ س (ب) جتا ٢ س (جـ) −٢ جا ٢ س (د) −٢ جتا ٢ س

③ $\frac{د}{د س}$ (١ + ظا^{٢} س)^{٣} = ...

(أ) ٦ قا^{٥} س ظا س (ب) ٣ قا^{٢} س ظا س

(جـ) ٦ قا^{٦} س ظا س (د) ٣ قا^{٤} س ظا س

④ $\frac{د}{د س}$ [(قا س − ١) (قا س + ١)] = ...

(أ) قا^{٢} س ظا^{٢} س (ب) ٢ قا^{٢} س ظا س

(جـ) قا^{٢} س ظا س (د) قا^{٤} س

٩ إذا كانت : ص = طتا $\frac{\pi}{٦}$ ع ، ع = ٣ $\sqrt{س}$ أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ١ «$\frac{\pi -}{٤}$»

١٠ إذا كانت : ص = جا س + قا س ، س = ٣ π ع أوجد : $\frac{د ص}{د ع}$ عند ع = ١ «−٣ π»

١١ إذا كانت : ص = $\sqrt{٥ - ٢ ع}$ ، ع = قا ٢ س

أثبت أن : $\sqrt{٣}$ $\frac{د ص}{د س}$ + ١٢ = ٠ عند س = $\frac{\pi}{٦}$

١٢ إذا كانت : ص = (٥ ع + ١)° ، ع = $\frac{١}{٥}$ طتا ٢ س أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ عند س = $\frac{\pi}{٨}$

«−٣٢٠»

١٣ إذا كانت : ص = قتا س + طتا س أثبت أن : $\frac{د ص}{د س}$ + ص قتا س = ٠

١٤ إذا كانت : ص = $\frac{١}{٤}$ قا^{٤} س أثبت أن : $\frac{د ص}{د س}$ = ٤ ص ظا س

١٥ إذا كانت : ص = (ق٢ س + ط٢ س)^{٥} أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ ق٢ ص ق٢ س

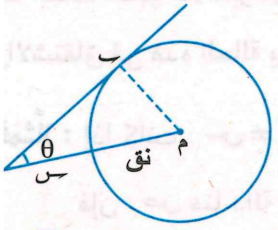
١٦ إذا كانت : ص = ق^{٥} (س) أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ ق٤ ص ط٢ س

١٧ إذا كانت : ص = ق٢ س (ط٢ س + ط٤ س) أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ − ط^{٢} س = ١

١٨ إذا كانت : ص = ع^{٤} − ٢ ع^{٢} + ١ ، ع = ق٢ ٤ س

أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٣٢ ص ق٢ ٨ س = ٠

١٩ في الشكل المقابل :



أ نقطة تتحرك في المستوى ، $\overline{أ ب}$ مماس للدائرة م عند ب

، أ م = س + نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة :

① أثبت أن : س = نق (ق٢ θ − ١)

② أوجد : معدل تغير س بالنسبة إلى θ عندما : θ = $\frac{\pi}{٦}$

«−٢ √٣ نق

الدرس 2

الاشتقاق الضمنى والبارامترى

الاشتقاق الضمنى

إذا كان لدينا المعادلتان : ص = س^{٢} + ٣ ، ٥ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = ٠

نلاحظ أن المعادلة الأولى تعرف ص كدالة فى س وتسمى هذه المعادلة بالدالة الصريحة وتعرف بالصورة [ص = د (س)]

أما المعادلة الثانية فلا تعبر عن دالة وتسمى بالعلاقة الضمنية وتعرف بالصورة [ع (س ، ص) = ٠] والاشتقاق فى هذه الحالة يسمى بالاشتقاق الضمنى.

فمثلًا : إذا كانت : س ≠ ١ وكان ص = $\frac{س}{١ - س}$ (١)

فإن : ص هنا دالة فى س وبضرب طرفى (١) فى (١ − س)

∴ ص (١ − س) = س ∴ ص − س ص − س = ٠ (٢)

ونلاحظ أن : (١) ، (٢) هما صورتان لدالة واحدة وتسمى الصورة الأولى بالدالة الصريحة أما الصورة الثانية فتسمى دالة ضمنية.

ومن العلاقة (١) : ص = $\frac{س}{١ - س}$ نجد أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(١ - س) - س \times -١}{(١ - س)^{٢}} = \frac{١}{(١ - س)^{٢}}$

ومن العلاقة (٢) : ص − س ص − س = ٠ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س (اشتقاق ضمنى)

∴ $\frac{ء}{ء س}$ (ص) − $\frac{ء}{ء س}$ (س ص) − $\frac{ء}{ء س}$ (س) = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ − $\left(س \frac{ء ص}{ء س} + ص\right)$ − ١ = ٠ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ − س $\frac{ء ص}{ء س}$ − ص − ١ = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ (١ − س) = ص + ١

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص + ١}{١ - س} = \frac{١ + \frac{س}{١ - س}}{١ - س} = \frac{س + ١ - س}{(١ - س)^{٢}} = \frac{١}{(١ - س)^{٢}}$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها من الصورة الأولى

* طبيعى أننا إذا أردنا أن نوجد $\frac{د ص}{د س}$ لعلاقة ضمنية فعلينا أن نحولها أولًا إلى علاقة صريحة

ثم نستخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد $\frac{د ص}{د س}$

إلا أنه فى بعض الأحيان يكون من المتعذر تحويل العلاقة الضمنية إلى علاقة صريحة مثل العلاقة الضمنية $س^{٢} - ٣ س ص - ص^{٣} = ٤$ ، إذ لا يمكن فصل المتغير ص فى طرف مستقل ، لذلك نلجأ إلى الاشتقاق الضمنى لطرفى المتساوية بالنسبة إلى أحد المتغيرين س أ، ص لنحصل على $\frac{د ص}{د س}$ أ، $\frac{د س}{د ص}$

ملاحظة

توجد بعض العلاقات لا تمثل بدالة واحدة ولكنها تمثل بدالتين صريحتين.

فمثلًا :

العلاقة $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ ليست دالة لأن لأى قيمة للمتغير س يناظرها قيمتان للمتغير ص

لأن $ص = \pm \sqrt{٤ - س^{٢}}$ أى أن هذه العلاقة تمثل دالتين صريحتين

الأولى : $ص = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ ومشتقتها $\frac{د ص}{د س} = \frac{- ٢ س}{٢ \sqrt{٤ - س^{٢}}} = \frac{- س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}} = \frac{- س}{ص}$

الثانية : $ص = - \sqrt{٤ - س^{٢}}$ ومشتقتها $\frac{د ص}{د س} = - \left(\frac{- ٢ س}{٢ \sqrt{٤ - س^{٢}}} \right) = \frac{- س}{- \sqrt{٤ - س^{٢}}} = \frac{- س}{ص}$

وإذا تناولنا العلاقة : $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

نجد أن : $\frac{د}{د س} (س^{٢}) + \frac{د}{د س} (ص^{٢}) = \frac{د}{د س} (٤)$

$\therefore ٢ س + ٢ ص \frac{د ص}{د س} = ٠$ $\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{- س}{ص}$

وهذه هى نفس المشتقة لكل من الدالتين الصريحتين $ص = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ ، $ص = - \sqrt{٤ - س^{٢}}$

* مما سبق نستنتج أنه لنفس العلاقة سواء كانت فى صورتها الصريحة أو الضمنية يكون لها نفس المشتقة ونحصل عليها بالاشتقاق بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص

مثال ١

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى :

(١) $س^{٢} + ص^{٢} + ٣ س - ٤ ص = ١$ عند النقطة (١ ، ٣)

(٢) $س^{٢} + ٤ س ص - ٣ ص^{٢} - ٢ س = ٣$ عند النقطة (٣ ، ٠)

الحل

(١) $س^{٢} + ص^{٢} + ٣ س - ٤ ص = ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س + ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} + ٣ - ٤ \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore (٢ ص - ٤) \frac{ء ص}{ء س} = - ٢ س - ٣$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{- ٢ س - ٣}{٢ ص - ٤}$

$\therefore \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{(١ ، ٣)} = \frac{-٥}{٢}$

تذكر أن :

$\frac{ء}{ء س} ص^{ن} = ن ص^{ن-١} \frac{ء ص}{ء س}$

(٢) $س^{٢} + ٤ س ص - ٣ ص^{٢} - ٢ س = ٣$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س + ٤ \left(س \frac{ء ص}{ء س} + ص\right) - ٣ \times ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} - ٢ = ٠$

$\therefore ٢ س + ٤ س \frac{ء ص}{ء س} + ٤ ص - ٦ ص \frac{ء ص}{ء س} - ٢ = ٠$

$\therefore (٤ س - ٦ ص) \frac{ء ص}{ء س} = ٢ - ٢ س - ٤ ص$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢ - ٢ س - ٤ ص}{٤ س - ٦ ص} = \frac{١ - س - ٢ ص}{٢ س - ٣ ص}$

$\therefore \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{(٠ ، ٣)} = \frac{١}{٣}$

مثال ٢

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ٨ ص + ١٧ = ٠$

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة $(١ ، ٢)$

الحل

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ٨ ص + ١٧ = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س + ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} - ٦ - ٨ \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore (٢ ص - ٨) \frac{ء ص}{ء س} = ٦ - ٢ س$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٦ - ٢ س}{٢ ص - ٨} = \frac{٣ - س}{ص - ٤}$

$\therefore \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{(١ ، ٢)} = -١$

$\therefore ظا هـ = -١$

$\therefore ق (هـ) = ١٣٥°$

مثال ٣

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى :

(١) $س^{٥} ص^{٥} = ١$

(٢) $س^{٧} + ص^{٧} = ٢$

(٣) $ص^{٣} + ٢ س^{٢} ص - ٣ س ص^{٢} = ٠$

(٤) $جا ٣ ص - جتا ٢ س = ٠$

(٥) $س جتا ص + ص جا ٢ س = ١$

(٦) $قا ٢ س + ظتا ص = س ص$

الحل

(١) $س^{٥} ص^{٥} = ١$ $\therefore س ص = ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore س \frac{ء ص}{ء س} + ص = ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = -\frac{ص}{س}$

(٢) $س^{٧} + ص^{٧} = ٢$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٧ س^{٦} + ٧ ص^{٦} \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{-٧ س^{٦}}{٧ ص^{٦}} = -\left(\frac{س}{ص}\right)^{٦}$

③ $ص^{٣} + ٢ س^{٢} ص - ٣ س ص^{٢} = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣ ص^{٢} \frac{ء ص}{ء س} + ٢ \left(س^{٢} \frac{ء ص}{ء س} + ص \times ٢ س \right) - ٣ \left(س \times ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} + ص^{٢} \right) = ٠$

$\therefore ٣ ص^{٢} \frac{ء ص}{ء س} + ٢ س^{٢} \frac{ء ص}{ء س} + ٤ س ص - ٦ س ص \frac{ء ص}{ء س} - ٣ ص^{٢} = ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} (٣ ص^{٢} + ٢ س^{٢} - ٦ س ص) = ٣ ص^{٢} - ٤ س ص$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣ ص^{٢} - ٤ س ص}{٣ ص^{٢} + ٢ س^{٢} - ٦ س ص}$

④ $جا ٣ ص - جتا ٢ س = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣ جتا ٣ ص \times \frac{ء ص}{ء س} - (-٢ جا ٢ س) = ٠$

$\therefore ٣ جتا ٣ ص \times \frac{ء ص}{ء س} + ٢ جا ٢ س = ٠$ $\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{- ٢ جا ٢ س}{٣ جتا ٣ ص}$

⑤ $س جتا ص + ص جا ٢ س = ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore [س \times (- جا ص \times \frac{ء ص}{ء س}) + جتا ص] + [ص \times ٢ جتا ٢ س + جا ٢ س \times \frac{ء ص}{ء س}] = ٠$

$\therefore - س جا ص \times \frac{ء ص}{ء س} + جتا ص + ٢ ص جتا ٢ س + جا ٢ س \times \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore (جا ٢ س - س جا ص) \frac{ء ص}{ء س} = - ٢ ص جتا ٢ س - جتا ص$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{- ٢ ص جتا ٢ س - جتا ص}{جا ٢ س - س جا ص}$

⑥ $ظا ٢ س + ظتا ص = س ص$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ ظا ٢ س طا ٢ س - ظتا^{٢} ص \times \frac{ء ص}{ء س} = س \times \frac{ء ص}{ء س} + ص$

$\therefore س \times \frac{ء ص}{ء س} + ظتا^{٢} ص \times \frac{ء ص}{ء س} = ٢ ظا ٢ س طا ٢ س - ص$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} (س + ظتا^{٢} ص) = ٢ ظا ٢ س طا ٢ س - ص$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢ ظا ٢ س طا ٢ س - ص}{س + ظتا^{٢} ص}$

مثال ٤

إذا كان : س = (ص^{٥} − ١)^{٨} أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص^{٥} - ١}{٤٠ س ص^{٤}}$

الحل

∵ س = (ص^{٥} − ١)^{٨} (بالاشتقاق بالنسبة إلى ص)

∴ $\frac{ء س}{ء ص}$ = ٨ (ص^{٥} − ١)^{٧} × ٥ ص^{٤}

∴ $\frac{ء س}{ء ص}$ = ٤٠ ص^{٤} (ص^{٥} − ١)^{٧}

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{٤٠ ص^{٤} (ص^{٥} - ١)^{٧}} \times \frac{(ص^{٥} - ١)}{(ص^{٥} - ١)}$

$= \frac{ص^{٥} - ١}{٤٠ ص^{٤} (ص^{٥} - ١)^{٨}} = \frac{ص^{٥} - ١}{٤٠ س ص^{٤}}$

للحظ أن

$\frac{ء ص}{ء س} = ١ \div \frac{ء س}{ء ص}$

الاشتقاق البارامترى

* إن أمكن التعبير عن كل من الإحداثى السينى والإحداثى الصادى للنقطة (س ، ص) بدالة فى متغير ثالث وليكن ن (يسمى الوسيط أو البارامتر) بالمعادلتين :

س = د (ن) ، ص = ر (ن) حيث المعادلتين معًا تمثلان معادلة لمنحنى واحد لجميع قيم ن التى تنتمى للمجال المشترك للدالتين د ، ر معبرًا عنه بالصورة البارامترية وكل قيمة للمتغير (ن) تحدد نقطة (س$_{ن}$ ، ص$_{ن}$) ومجمل هذه النقط هو منحنى الدالة البارامترية.

الاشتقاق البارامترى

إذا كانت : ص = د (ن) ، س = ر (ن) هما معادلتا منحنى على الصورة البارامترية حيث : د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن

فإن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ن} \times \frac{ء ن}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ن} \div \frac{ء س}{ء ن}$

ملاحظة

يمكن تحويل الصورة البارامترية إلى الصورة الصريحة أو الضمنية وذلك بحذف المتغير البارامترى ($ن$) من معادلتى $س$ ، $ص$ وتسمى أى من الصورتين الصريحة أو الضمنية بالصورة الكارتيزية.

فمثلًا : ① إذا كانت المعادلتان البارامتريتان لمنحنى دالة ما هما :

$س = ٢ ن$ (١) ، $ص = ن^٢$ (٢) فإن :

من (١) $ن = \frac{س}{٢}$ وبالتعويض فى (٢) :

$\therefore ص = (\frac{س}{٢})^٢$ $\therefore ص = \frac{١}{٤} س^٢$ «الصورة الكارتيزية»

② إذا كانت المعادلتين البارامتريتان للمنحنى هما :

$س = ٣ جتا \theta$ ، $ص = ٣ جا \theta$ فإن $س^٢ = ٩ جتا^٢ \theta$ ، $ص^٢ = ٩ جا^٢ \theta$

أى أن : $س^٢ + ص^٢ = ٩ (جتا^٢ \theta + جا^٢ \theta)$ أى $س^٢ + ص^٢ = ٩$ «الصورة الكارتيزية»

مثال ٥

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى عند قيم $ن$ المبينة :

① $س = ٢ ن^٢$ ، $ص = ن^٤$ عند $ن = ٤$

② $س = ٢ جتا^٣ \theta$ ، $ص = ٥ جا^٣ \theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$

الحل

① $\because س = ٢ ن^٢$ $\therefore \frac{ء س}{ء ن} = ٤ ن$

، $\because ص = ن^٤$ $\therefore \frac{ء ص}{ء ن} = ٤ ن^٣$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ن} \div \frac{ء س}{ء ن} = \frac{٤ ن^٣}{٤ ن}$ $\therefore [\frac{ء ص}{ء س}]_{ن=٤} = ١٦$

② ∵ س = ٢ جتا^{٣} θ ∴ $\frac{د س}{د θ}$ = ٦ جتا^{٢} θ × − جا θ = −٦ جا θ جتا^{٢} θ

، ∵ ص = ٥ جا^{٣} θ ∴ $\frac{د ص}{د θ}$ = ١٥ جا^{٢} θ × جتا θ = ١٥ جا^{٢} θ جتا θ

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د θ}$ ÷ $\frac{د س}{د θ}$ = $\frac{١٥ جا^{٢} θ جتا θ}{-٦ جا θ جتا^{٢} θ}$ = $\frac{-٥ جا θ}{٢ جتا θ}$ = $\frac{-٥}{٢}$ ظا θ

∴ $\left[\frac{د ص}{د س}\right]_{θ = \frac{π}{٤}}$ = $\frac{-٥}{٢}$ ظا $\frac{π}{٤}$ = $\frac{-٥}{٢}$

مثال ٦

أوجد : مشتقة $\sqrt{٥ + س^{٢}}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{س + ٢}$ عند س = ٢

الحل

بوضع ص = $\sqrt{٥ + س^{٢}}$ ، ع = $\frac{س}{س + ٢}$

∴ المطلوب إيجاد $\frac{د ص}{د ع}$ عند س = ٢

، ∵ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢ س}{٢\sqrt{٥ + س^{٢}}}$ = $\frac{س}{\sqrt{٥ + س^{٢}}}$ ، $\frac{د ع}{د س}$ = $\frac{س + ٢ - س}{(س + ٢)^{٢}}$ = $\frac{٢}{(س + ٢)^{٢}}$

∴ $\frac{د ص}{د ع}$ = $\frac{د ص}{د س}$ ÷ $\frac{د ع}{د س}$

∴ $\frac{د ص}{د ع}$ = $\frac{س}{\sqrt{٥ + س^{٢}}}$ ÷ $\frac{٢}{(س + ٢)^{٢}}$ = $\frac{س (س + ٢)^{٢}}{٢\sqrt{٥ + س^{٢}}}$ ∴ $\left(\frac{د ص}{د ع}\right)_{س = ٢}$ = $\frac{١٦}{٣}$

مثال ٧

أوجد قيمة البارامتر ن التى عندها يكون للمنحنى :

س = ٤ ن^{٣} − ١٥ ن^{٢} − ١٨ ن + ٤ ، ص = ٢ ن^{٢} − ٣ ن + ٧

① مماس رأسى. ② مماس أفقى

الحـل

∵ س = ٤ ن^{٣} − ١٥ ن^{٢} − ١٨ ن + ٤ ∴ $\frac{د س}{د ن}$ = ١٢ ن^{٢} − ٣٠ ن − ١٨

، ص = ٢ ن^{٢} − ٣ ن + ٧ ∴ $\frac{د ص}{د ن}$ = ٤ ن − ٣

، ∵ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (س ، ص) يساوى $\frac{د ص}{د س}$

حيث : $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ن}$ ÷ $\frac{د س}{د ن}$ = $\frac{٤ ن − ٣}{١٢ ن^{٢} − ٣٠ ن − ١٨}$

لاحـظ أن

* إذا كان المماس أفقى :
فإن ميل المماس = ٠
أى البسط = ٠
* إذا كان المماس رأسى :
فإن ميل المماس غير معرف
أى المقام = ٠

① فى حالة المماس الرأسى يكون ميل المماس غير معرف

ونضع ١٢ ن^{٢} − ٣٠ ن − ١٨ = ٠

∴ ٢ ن^{٢} − ٥ ن − ٣ = ٠

∴ (٢ ن + ١) (ن − ٣) = ٠

∴ ن = − $\frac{١}{٢}$ أ، ن = ٣

∴ يكون للمنحنى مماسًا رأسيًا عندما ن = − $\frac{١}{٢}$ أ، ن = ٣

② فى حالة المماس الأفقى يكون ميل المماس = صفر

ونضع ٤ ن − ٣ = ٠ ∴ ن = $\frac{٣}{٤}$ ∴ يكون للمنحنى مماسًا أفقيًا عندما ن = $\frac{٣}{٤}$

تمارين

2

على الاشتقاق الضمنى والبارامترى

من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا مسائل على الاشتقاق الضمنى

١ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل من العلاقات الآتية :

(١) $س^{٢} - ٤ ص^{٢} + ٧ = ٠$

(٢) $س^{٤} + ٣ ص^{٤} - ٢ = ٠$

(٣) $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥$

(٤) $س^{٣} + ص^{٢} - ٧ س + ٥ ص = ٨$

(٥) $س^{٣} + ص^{٣} - ٢ س + ٣ ص^{٢} = ٨$

(٦) (دورنان ٢٠٠٩) $س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ٦ س ص + ٤$

(٧) $س^{٣} + ٦ س ص = ٤ ص + ٣$

(٨) $س^{٣} - ٥ س ص + ص^{٣} = ٤ س$

(٩) $س ص = ١٠٠ (س + ص)$

(١٠) $س^{٢} ص^{٢} = ١٠$

(١١) $س^{٢} ص + ص^{٢} س = ٢٥$

(١٢) $ص^{٤} + س^{٣} ص + ٤ س^{٤} = ٨$

(١٣) $س^{ن} ص^{ن} = أ^{ن}$ حيث أ ثابت ، ن عدد صحيح موجب

(١٤) $س^{ن} + ص^{ن} = أ^{ن}$ حيث أ ثابت ، ن عدد صحيح موجب

٢ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل من العلاقات الآتية :

(١) $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} = ٥$

(٢) $\frac{س^{٣} + ص^{٣}}{س^{٣} - ص^{٣}} = ٧$

(٣) $٢\sqrt{س} + ٢\sqrt{ص} = ٤$

(٤) $ص + ٢\sqrt{س ص} = ٢ س^{٢}$

(٥) $جتا ٤ س = جا ٣ ص$

(٦) $جا ٣ س = ظا ٢ ص$

(٧) $س\ جا ص = ص$

(٨) $جا ٢ ص = ص\ جتا ٢ س$

(٩) $س ص + جا ص = ٥$

(١٠) $٥ ص + جتا ص = س^{٢}$

(١١) $جا س\ جتا ص = \frac{١}{٢}$

(١٢) $٣ ص = جا ٢ س\ جتا ص$

(١٣) $س\ جتا ص + ص\ جتا س = ١$

(١٤) $س^{٢}\ جتا ٢ ص - ٤ ص\ جا ٣ س = ٥$

(١٥) $س^{٢}\ جا ص - ص^{٢}\ جا س = ٩$

(١٦) $س\ ظا ص = ص\ ظا س$

(١٧) $ظا ٢ س + ظا ص = س ص$

(١٨) $جا^{٢} س + ٢ جتا ص + س ص = ٠$

(١٩) $ص\ ق(س) + ظا س + س^{٢} ص = ٠$

(٢٠) $أ\ جتا ب س + ب\ جا أ ص = حـ$ حيث $أ ، ب ، حـ$ ثوابت.

٣ أوجد ميل المماس للمنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(١) $٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} = ٥$ عند النقط $(-١ ، -١)$ «$-\frac{٢}{٣}$»

(٢) $ص^{٢} + ٣ س ص = ١٠$ عند النقط $(١ ، ٢)$ «$\frac{-٦}{٧}$»

(٣) $س^{٢} - ٣ س ص + ص^{٢} = ١١$ عند النقط $(٢ ، -١)$ «$\frac{٧}{٨}$»

(٤) $س ص^{٣} = ٣$ عند النقطة $(٣ ، ١)$ «$\frac{-١}{٩}$»

(٥) $س^{٤} - ٢ س^{٣} ص^{٢} + س ص^{٣} = ١$ عند النقطة $(١ ، ٢)$ «٣»

(٦) $س^{٢} - س ص + ص^{٢} = ٢٧$ عند النقطة $(٦ ، ٣)$ «غير معرف»

(٧) $\frac{٢ س}{ص} + \frac{٣ ص}{س} = ٧$ عند النقطة $(١ ، ٢)$ «٢»

(٨) $س \sqrt{ص} + ص \sqrt{س} = ٦$ عند النقطة $(١ ، ٤)$ «$-\frac{١٦}{٥}$»

(٩) $جتا \sqrt{\pi ص} = ٣ س + ١$ عند النقطة $\left(-\frac{١}{٣} ، \frac{\pi}{٤}\right)$ «-٣»

(١٠) $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ حيث $أ ، ب$ ثابتان عند النقطة $(أ\ جتا هـ ، ب\ جا هـ)$ «$-\frac{ب}{أ}\ ظا هـ$»

٤ أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحو
السينات عند النقطة المبينة أمام كل منها :

① $س^{٢} - ٣ س ص + ص^{٢} = ٥$ عند النقطة $(١ ، -١)$ «٤٥°»

② $س^{٣} - س^{٢} ص - س - ٣ ص = ٠$ عند النقطة $(١ ، ٠)$ «$٣٤^{\circ}\ ٢٦'$»

③ $\frac{س}{ص} - \frac{٤ ص}{س} = ٣$ عند النقطة $(١ ، -١)$ «١٣٥°»

④ $ظا ٢ س = ظا ص$ عند النقطة $\left(\frac{\pi ٣}{٤} ، \frac{\pi ٣}{٤}\right)$ «صفر»

ثانيًا مسائل على الاشتقاق البارامترى

٥ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل من المنحنيات الآتية عند القيم المعطاة :

① $س = ٥ ن + ٣$ ، $ص = ١٦ ن^{٢} + ٩$ عند $ن = ٥$ «٢»

② $س = ٢ ن^{٢}$ ، $ص = ٢ ن^{٦}$ عند $ن = ١$ «١»

③ $س = ٤ ن$ ، $ص = \frac{٤}{ن}$ عند $ن = ٣$ «$-\frac{١}{٩}$»

④ $س = (ن + ٧)(ن - ٢)$ ، $ص = (ن^{٢} + ١)(ن - ٢)$ عند $ن = ١$ «صفر»

⑤ $س = ١٣ - ٢ ن$ ، $ص = ٤ ن^{٢} - \sqrt{ن}$ عند $ن = ٤$ «$-\frac{١٢٧}{٨}$»

⑥ $س = \sqrt{٣ ن - ٢}$ ، $ص = \sqrt{٤ ن + ١}$ عند $ن = ٢$ «$\frac{٨}{٩}$»

⑦ $س = \frac{٣ ن^{٢}}{ن^{٣} + ١}$ ، $ص = \frac{٣ ن^{٢}}{ن^{٣} + ١}$ عند $ن = -٢$ «$\frac{-٢٠}{١٧}$»

٦ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل من المنحنيات الآتية عند القيم المعطاة :

① $س = ٣ جتا^{٢} \theta$ ، $ص = ٤ جا ٣ \theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ «$\sqrt{٢}$»

② $س = جا ٢ \theta$ ، $ص = جتا ٢ \pi \theta$ عند $\theta = \frac{١}{٦}$ «$-\sqrt{٣}$»

③ $س = ٥ جتا^{٢} \theta$ ، $ص = ٤ جا^{٢} \theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٦}$ «$\frac{-٤}{٥}$»

④ $س = ٨ جتا^{٣} \theta$ ، $ص = ٨ جا^{٣} \theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ «-١»

⑤ $س = ٥ + ظتا^{٢} ٣ \theta$ ، $ص = ١ - ظا ٣ \theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑥ $س = ظتا^{٢} \theta - ١$ ، $ص = ظا \theta$ عند $\theta = \frac{\pi ٣-}{٤}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑦ س = أ ظا θ ، ص = ب ظا θ عند θ = $\frac{\pi ٣}{٤}$ «$\frac{٢\sqrt{ب}}{أ}$»

⑧ س = جتا θ + جتا ٢ θ ، ص = جا θ + جا ٢ θ عند θ = $\frac{\pi}{٣}$ «$\frac{٣\sqrt{٣}}{٩}$»

⑨ س = ٣ جتا θ − ٢ جتا^{٣} θ ، ص = ٣ جا θ − ٢ جا^{٣} θ عند θ = $\frac{\pi}{٢}$ «صفر»

⑩ س = أ (جتا θ + θ جا θ) ، ص = أ (جا θ − θ جتا θ) عند θ = $\frac{\pi}{٦}$ «$\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$»

٧ باستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد :

① مشتقة (٤ س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٥) بالنسبة إلى (٣ س^{٢} + ٧)

② معدل تغير (س + ٣) (س − ٢) بالنسبة إلى $\frac{س - ٣}{س + ٢}$

③ معدل تغير $\sqrt{س^{٢} + ١٦}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{س - ١}$ عندما س = ٣ «−٢,٤»

④ مشتقة $\frac{س + ١}{س - ١}$ بالنسبة إلى $\sqrt{٢ س + ١}$ عندما س = ٤ «$\frac{-٢}{٣}$»

⑤ مشتقة (س − جا س) بالنسبة إلى (١ − جتا س) عندما س = $\frac{\pi}{٣}$ «$\frac{٣\sqrt{٣}}{٣}$»

ثالثًا مسائل متنوعة

٨ أكمل ما يأتى :

① إذا كان : د (س) = ٢ أ^{٦} + ٥ ب^{٤} حيث أ ، ب ثوابت فإن : د$'$ (س) = ...

② إذا كان : د (س) = جا^{٢} س + جتا^{٢} س فإن : د$'$ (−١) = ...

③ إذا كان : ق (س) = | س | فإن : ق$'$ (−٥) = ...

④ إذا كان : (س + ص)^{٣} = ٥ فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

⑤ إذا كان : س = (١ − ص) (١ + ص) (١ + ص^{٢}) (١ + ص^{٤})

فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

⑥ إذا كان : س = ص $\sqrt{ص}$ + $\frac{ص^{٢}}{\sqrt{ص}}$ فإن : $\frac{ء س}{ء ص}$ = ...

⑦ إذا كان : د (س) = ٨ س جا س جتا س جتا ٢ س فإن : د$'$ ($\frac{\pi}{٨}$) = ...

(٨) إذا كانت : ص = $\sqrt{\text{ر}(\text{س})}$ وكان ر$'$ (٢) = ٤ ، ر (٢) = ٩

فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ عندما س = ٢ تساوى

(٩) إذا كان : س^{٣} ص^{٢} = ١ فإن : $\left[\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right]_{\text{ص}=١}$ = ...

(١٠) إذا كان : د (٥ س) = س^{٢} + س فإن : د$'$ (٢) = ...

(١١) إذا كان : د (س) = ٣ س + ر (س) وكان ر$'$ (٢) = −٥

فإن : ميل المماس لمنحنى الدالة د عند س = ٢ يساوى

(١٢) إذا كانت : ص = $\frac{١}{٣}$ جا^{٣} س − جا س فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = (.....)^{٣}

(١٣) إذا كان : ص = $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣} س + ظا س فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = (.....)^{٤}

(١٤) إذا كان : ص = $\frac{\text{ع} + ١}{\text{ع} - ١}$ ، س = $\frac{\text{ع} - ١}{\text{ع} + ١}$

فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ... عند س = ٢

(١٥) إذا كانت : ص = ٣ ن^{٢} + ١ ، ع = ٢ ن − ٥ فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}}$ = ...

(١٦) إذا كان : ص = ٢ ن^{٣} + ٧ ، ع = ن^{٢} − ٤

فإن معدل تغير ص بالنسبة إلى ع يساوى

(١٧) إذا كان : س = ٢ ن^{٢} + ٣ ، ص = $\sqrt[٣]{\text{ن}}$

فإن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ عند ن = ١ تساوى

(١٨) إذا كانت : د (س) = $\frac{٢}{\text{س} + ١}$ ، ر (س) = ٣ س

فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [(د ○ ر) (س)] = ... عند س = −٢

(١٩) إذا كانت : د (س) = ٢ س^{٣} + ١ ، هـ (س) = س^{٢} فإن : د$'$ (هـ (٣)) = ...

(٢٠) قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى | س − ٢ | = $\frac{\text{ص}}{\text{س}^{٢}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ١ تساوى°

(٢١) إذا كانت : د (س) = ١ + س + س^{٢} + س^{٣} + ... + س^{١٢}

فإن : د$'$ (١) = ...

(٢٢) إذا كانت : د$'$ (س) + د (س) = س حيث د (س) كثيرة حدود

فإن : د (٤) = ...

(٢٣) إذا كان : د (س) + د$'$ (س) = س^{٣} + ٥ س^{٢} + س + ٢ حيث د (س) كثيرة حدود

فإن : د (س) = ...

(٢٤) ميل المماس للمنحنى س = ص^{١٠٠} + لو (١٠٠)^{ص} عند النقطة (٠ ، ٠)

يساوى

(٢٥) إذا كانت د (٢ س + ١) = س . هـ (٢ س − ٥) وكان هـ (١) = ٢ ، هـ$'$ (١) = ٤

فإن د$'$ (٧) = ...

٩ إذا كانت : د ، ر ، و دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

أكمل ما يأتى باستخدام القيم المعطاه فى الجدول المقابل :

س	١	٢
د (س)	−١	٤
ر (س)	٢	١
د$'$ (س)	١	٥
ر$'$ (س)	٢	−٣

(١) و (س) = ٣ د (س) − ٢ ر (س)

فإن : و$'$ (١) = ...

(٢) و (س) = د (س) [٥ + ر (س)]

فإن : و$'$ (٢) = ...

(٣) و (س) = د (س) ÷ [ر (س) + ٢]

فإن : و$'$ (١) = ...

(٤) و (س) = د [ر (س)] فإن : و$'$ (١) = ...

(٥) و (س) = ر [٣ س − د (س)] فإن : و$'$ (٢) = ...

(٦) و (س) = [س^{٣} + ر (س)]$^{-٢}$ فإن : و$'$ (١) = ...

١٠ إذا كانت : ص = (س^{٣} + ٢)^{٧} أثبت أن : $\frac{ء س}{ء ص} = \frac{س^{٣} + ٢}{٢١ س^{٢} ص}$

١١ (دورثان ٢٠٠٣) إذا كانت : س = (ص^{٣} − ١)^{٥} أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص^{٣} - ١}{١٥ س ص^{٢}}$

١٢ إذا كان : $\frac{٢}{\sqrt{س} + \sqrt{ص}} = ٥$ أثبت أن : $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^{٢} = \frac{ص}{س}$

١٣ إذا كان : (ص − ١)^{ن} − (س − ١)^{ن} = ١^{ن} حيث ١ ثابت أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \left(\frac{س - ١}{ص - ١}\right)^{ن-١}$

١٤ إذا كانت : ص^{٢} + ٢ ١ س − ١^{٢} = ٠ حيث ١ ثابت أثبت أن : $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^{٢} + \frac{٢ س}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س} = ١$

١٥ إذا كان : ص^{٢} = س + $\sqrt{١ + س^{٢}}$ أثبت أن : ٢ $\sqrt{١ + س^{٢}}$ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ص

١٦ إذا كانت : ص = $\left(\frac{س^{٢} - ٢}{س^{٢} + ٢}\right)^{ن}$ أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{س^{٤} - ٤}{٨ ن س ص}$

١٧ إذا كان : $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س}$ = ١ حيث ١ ثابت أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص}{س}$

١٨ إذا كانت : د (س) = $\frac{ق(س)}{ر(س)}$ حيث ق (س) ، ر (س) دالتان قابلتان للاشتقاق

عند س = ١ ، دَ (١) = صفر فأثبت أن : د (١) = $\frac{ق(١)}{ر(١)}$

١٩ إذا كان : ص = ظا^{٣} θ ، ع = حتا^{٣} θ أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء ع}$ + ظا θ = ٠

٢٠ إذا كان : س = ١ $\left(ن + \frac{١}{ن}\right)$ ، ص = ١ $\left(ن - \frac{١}{ن}\right)$ أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{س}{ص}$

٢١ أوجد قيمة البارامتر ع التى يكون عندها للمنحنى :

س = ٢ ع^{٣} − ٥ ع^{٢} − ٤ ع + ١٢ ، ص = ٢ ع^{٢} + ع − ٤

① مماس أفقى. ② مماس رأسى «$-\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{١}{٣}$ أ، ٢»

٢٢ أوجد قيمة البارامتر $ن$ التى عندها يكون للمنحنى :

$س = ن^٣ - ٧ ن^٢ + ١٦ ن + ١$ ، $ص = ٢ ن^٣ - ٣ ن^٢ + ٥$

① مماس رأسى. ② مماس أفقى. « $\frac{٨}{٣}$ أ، ٢ ، صفر أ، ١»

٢٣ إذا كانت : $س = (١ - \sqrt[٣]{ص})(١ + \sqrt[٣]{ص} + \sqrt[٣]{ص^٢})(١ + ص + ص^٢)$

أثبت أن : $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{-١}{٣ ص^٢}$

٢٤ إذا كانت : $ص = د(ر(س))$ ، $د'(س) = \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ١}}$ ، $ر(س) = \frac{١}{س}$

أثبت أن : $\frac{ع ص}{ع س} = \begin{cases} \frac{-١}{س^٢\sqrt{١ + س^٢}} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{١}{س^٢\sqrt{١ + س^٢}} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

٢٥ إذا كان : $ا س$ $جتا ص - ا ص$ $جتا س = ١$

أوجد : $\frac{ع ص}{ع س}$ حيث $س$ ، $ص \in]٠ ، ٢\pi[$

٢٦ إذا كان : $ا^٢ س + جتا^٢ ص = \frac{١}{٤}$ أثبت أن : $\frac{ع س}{ع ص} = ا ٢ ص$ $ظتا ٢ س$

٢٧ إذا كانت : $س = جتا(س ص)$ أثبت أن : $\frac{ع ص}{ع س} + \frac{١ + ص ا(س ص)}{س ا(س ص)} = ٠$

٢٨ إذا كان : $ص = \frac{١ + ظا س}{١ - ظا س}$ أثبت أن : $\frac{ع س}{ع ص} = جتا^٢(س + ٤٥°)$

٢٩ إذا كان : $س = ا ص$ ، $٠ < س < ١$ ، ص زاوية حادة أثبت أن : $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^٢}}$

٣٠ أثبت أن : مشتقة الدالة الزوجية تكون فردية ومشتقة الدالة الفردية تكون زوجية.

٣١ أ ب حـ مثلث مساحته م ، النقطة حـ تتحرك على المستقيم : ص = ٢ س فإذا كان :

أ (ل ، ٠) ، ب (٠ ، ك) حيث ل ، ك ثابتان موجبان.

أثبت أن : $\frac{ء م}{ء س} = \begin{cases} -ل - \frac{ك}{٢} & ، س < \frac{ك ل}{ك + ٢ ل} \\ ل + \frac{ك}{٢} & ، س > \frac{ك ل}{ك + ٢ ل} \end{cases}$

٣٢ إذا كانت : ص = $\sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + ...}}}$ أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{٢ ص - ١}$

٣٣ إذا كانت : س = $\sqrt{ط ص + \sqrt{ط ص + \sqrt{ط ص + ...}}}$

أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س} = (٢ س - ١)$ جتا^{٢} ص

الدرس 3

المشتقات العليا للدالة

إذا كانت : ص = د (س) قابلة للاشتقاق عدة مرات بالنسبة للمتغير س فيمكننا الحصول على المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية ثم المشتقة الثالثة وهكذا ... كما يلى :

* المشتقة الأولى للدالة هى $\frac{ء ص}{ء س}$ أ، صَ أ، دَ (س)

* المشتقة الثانية للدالة هى «مشتقة المشتقة الأولى»

أى : $\frac{ء}{ء س}\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)$

ويرمز لها بأحد الرموز $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ أ، صً أ، دً (س)

* المشتقة الثالثة للدالة هى «مشتقة المشتقة الثانية»

أى : $\frac{ء}{ء س}\left(\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}\right)$

ويرمز لها بأحد الرموز $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ أ، صٌ أ، دٌ (س) وهكذا ...

فمثلًا : إذا كان : ص = س^{٤} − ٣ س^{٣} + ٥ س^{٢} − ٤ س + ٧

فإن : صَ = ٤ س^{٣} − ٩ س^{٢} + ١٠ س − ٤

، صً = ١٢ س^{٢} − ١٨ س + ١٠

، صٌ = ٢٤ س − ١٨

، $\frac{ء^{٤} ص}{ء س^{٤}}$ = ٢٤ ، $\frac{ء^{٥} ص}{ء س^{٥}}$ = صفر

، أى مشتقة تالية للمشتقة الخامسة = صفر

ملاحظـات

① $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ تقرأ دال اثنين ص دال س اثنين

② المشتقات لدالة بدءًا من المشتقة الثانية تسمى بالمشتقات العليا وتكتب المشتقة من الرتبة ن كما يلى : $ص^{(ن)} = \frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}} = د^{(ن)} (س)$ حيث ن عدد صحيح موجب

③ لاحظ الفرق بين : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ ، $\left(\frac{د ص}{د س}\right)^{٢}$ حيث أن :

* $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ هى المشتقة الثانية للدالة ص
* $\left(\frac{د ص}{د س}\right)^{٢}$ هى مربع المشتقة الأولى للدالة ص

④ * $\frac{د ص}{د س} \times \frac{د س}{د ص} = ١$ بينما $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} \times \frac{د^{٢} س}{د ص^{٢}} \neq ١$

* $\frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = \frac{د ص}{د س}$ بينما $\frac{د^{٢} ص}{د ع^{٢}} \times \frac{د^{٢} ع}{د س^{٢}} \neq \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$

«حيث لا توجد قاعدة سلسلة فى المشتقة الثانية».

⑤ $\frac{د}{د س}[ص \frac{د ص}{د س}]$ = الأول × مشتقة الثانى + الثانى × مشتقة الأول

$= ص \frac{د}{د س}\left(\frac{د ص}{د س}\right) + \left(\frac{د ص}{د س}\right) \times \left(\frac{د ص}{د س}\right)$

$= ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + \left(\frac{د ص}{د س}\right)^{٢}$

مثـال ١

إذا كانت : $ص = \frac{١}{٤} س^{٤} + ٢ س^{٣} - س^{٢} + ٣ س + ١$ أوجد : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند $س = ٢$

الحـل

$\frac{د ص}{د س} = س^{٣} + ٦ س^{٢} - ٢ س + ٣$ ، $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٣ س^{٢} + ١٢ س - ٢$

$\therefore \left[\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}\right]_{س = ٢} = ٣٤$

مثال ٢

أوجد المشتقة الثالثة والرابعة لكل مما يأتي :

① ص = س^{٣} − جا ٢ س ② ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$ حيث : س ≠ ١

الحل

① ∵ ص = س^{٣} − جا ٢ س

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٣ س^{٢} − ٢ جتا ٢ س ∴ $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ = ٦ س + ٤ جا ٢ س

∴ $\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}}$ = ٦ + ٨ جتا ٢ س ، $\frac{\text{د}^{٤}\text{ص}}{\text{د س}^{٤}}$ = −١٦ جا ٢ س

② ∵ ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{(\text{س} - ١) - \text{س}}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ = $\frac{-١}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ = − (س − ١)$^{-٢}$

∴ $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ = ٢ (س − ١)$^{-٣}$ ∴ $\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}}$ = −٦ (س − ١)$^{-٤}$ = $\frac{-٦}{(\text{س} - ١)^{٤}}$

∴ $\frac{\text{د}^{٤}\text{ص}}{\text{د س}^{٤}}$ = ٢٤ (س − ١)$^{-٥}$ = $\frac{٢٤}{(\text{س} - ١)^{٥}}$

مثال ٣

إذا كانت : ص^{٢} = س^{٢} (٤ − س) **أثبت أن :** ص $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ + $\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢}$ + ٣ س = ٤

الحل

∵ ص^{٢} = ٤ س^{٢} − س^{٣} (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٨ س − ٣ س^{٢} (بالقسمة على ٢)

∴ ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٤ س − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ + $\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢}$ = ٤ − ٣ س ∴ ص $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ + $\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢}$ + ٣ س = ٤

مثال ٤

إذا كانت : ص = س^{٢} + ٧ س − ١ ، ع = س^{٢} − ٣ س + ١٥

أوجد : $\frac{د^{٢} ص}{د ع^{٢}}$ عندما س = ٢

الحل

∵ ص = س^{٢} + ٧ س − ١ ∴ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س + ٧

، ∵ ع = س^{٢} − ٣ س + ١٥ ∴ $\frac{د ع}{د س}$ = ٢ س − ٣

∴ $\frac{د ص}{د ع} = \frac{د ص}{د س} \div \frac{د ع}{د س}$ ∴ $\frac{د ص}{د ع} = \frac{٢ س + ٧}{٢ س - ٣}$ (باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ع

∴ $\frac{د}{د ع}\left(\frac{د ص}{د ع}\right) = \frac{د}{د ع}\left(\frac{٢ س + ٧}{٢ س - ٣}\right)$

∴ $\frac{د^{٢} ص}{د ع^{٢}} = \frac{د}{د س}\left(\frac{٢ س + ٧}{٢ س - ٣}\right) \times \frac{د س}{د ع} = \frac{٢ (٢ س - ٣) - ٢ (٢ س + ٧)}{(٢ س - ٣)^{٢}} \times \frac{١}{٢ س - ٣}$

$= \frac{- ٢٠}{(٢ س - ٣)^{٣}}$

∴ $\left(\frac{د^{٢} ص}{د ع^{٢}}\right)_{س = ٢} = \frac{- ٢٠}{(٢ \times ٢ - ٣)^{٣}} = - ٢٠$

مثال ٥

إذا كانت : ص = جا س + جتا س **أثبت أن :** $\frac{د^{٤} ص}{د س^{٤}}$ = ص

الحل

∵ ص = جا س + جتا س ∴ ص$_{١}$ = جتا س − جا س

، ص$_{٢}$ = − جا س − جتا س

، $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$ = − جتا س + جا س ، $\frac{د^{٤} ص}{د س^{٤}}$ = جا س + جتا س = ص

مثال ٦

إذا كان : $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ أثبت أن : $ص^{٣} \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ١ = ٠$

الحل

$\because س^{٢} + ص^{٢} = ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س + ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} = ٠$ (بالقسمة على ٢)

$\therefore س + ص \frac{ء ص}{ء س} = ٠$ (١) $\therefore \boxed{\frac{ء ص}{ء س} = \frac{- س}{ص}}$

باشتقاق (١) بالنسبة إلى س

$\therefore ١ + ص \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \frac{ء ص}{ء س} \times \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore ١ + ص \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^{٢} = ٠$ وبالتعويض عن $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{- س}{ص}$

$\therefore ١ + ص \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \left(\frac{- س}{ص}\right)^{٢} = ٠$ $١ + ص \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \frac{س^{٢}}{ص^{٢}} = ٠$

بالضرب × $(ص^{٢})$: $\therefore ص^{٢} + ص^{٣} \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + س^{٢} = ٠$

، $\because س^{٢} + ص^{٢} = ١$ $\therefore ص^{٣} \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ١ = ٠$

مثال ٧

إذا كان : $س ص = ٥ جا ٢ س + ٣ جتا ٢ س$

أثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \frac{٢}{س} \frac{ء ص}{ء س} + ٤ ص = ٠$

الحل

$\because س ص = ٥ جا ٢ س + ٣ جتا ٢ س$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$س \frac{ء ص}{ء س} + ص = ١٠ جتا ٢ س - ٦ جا ٢ س$ (وبالاشتقاق مرة ثانية بالنسبة إلى س)

$\therefore$ س $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} + \frac{د ص}{د س} + \frac{د ص}{د س} = -٥ ا^٢ ا ا س - ٣ ا^٢ ا س$

$\therefore$ س $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} + ٢ \frac{د ص}{د س} = -ا^٢ (٥ ا ا س + ٣ ا ا س)$

$\therefore$ س $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} + ٢ \frac{د ص}{د س} = -ا^٢$ س ص

$\therefore$ س $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} + ٢ \frac{د ص}{د س} + ا^٢$ س ص $= ٠$ (بالقسمة على س)

$\therefore \frac{د^٢ ص}{د س^٢} + \frac{٢}{س} \frac{د ص}{د س} + ا^٢ ص = ٠$

مثال ٨

إذا كان : س ص $= ٢$ أثبت أن : س$^٢ \frac{د^٢ ص}{د س^٢} + ٣$ س $\frac{د ص}{د س} +$ ص $= ٠$

الحل

$\because$ س ص $= ٢$ $\therefore$ ص $= \frac{٢}{س} = ٢$ س$^{-١}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = -٢$ س$^{-٢}$ $\therefore \frac{د^٢ ص}{د س^٢} = ٤$ س$^{-٣}$

$\therefore$ س$^٢ \frac{د^٢ ص}{د س^٢} + ٣$ س $\frac{د ص}{د س} +$ ص $=$ س$^٢ \times ٤$ س$^{-٣} + ٣$ س $\times -٢$ س$^{-٢} + ٢$ س$^{-١}$

$= ٤$ س$^{-١} - ٦$ س$^{-١} + ٢$ س$^{-١} =$ صفر

مثال ٩

إذا كان : ص $=$ س ا س أثبت أن : س $\frac{د^٣ ص}{د س^٣} +$ س $\frac{د ص}{د س} + ٢$ ص $= ٠$

الحل

$\because$ ص $=$ س ا س

$\therefore \frac{د ص}{د س} =$ س $\times -$ ا س $+$ ا س $\times ١ = -$ س ا س $+$ ا س

$$\therefore \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = - س \times جتا س + جا س \times -١ + (- جا س)$$

$$= - س جتا س - جا س - جا س$$

$$= - س جتا س - ٢ جا س$$

$$\therefore \frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} = - س \times - جا س + جتا س \times -١ - ٢ جتا س$$

$$= س جا س - جتا س - ٢ جتا س$$

$$= س جا س - ٣ جتا س$$

$$\therefore س \frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} + س \frac{د ص}{د س} + ٢ ص$$

$$= س (س جا س - ٣ جتا س) + س (- س جا س + جتا س) + ٢ (س جتا س)$$

$$= س^{٢} جا س - ٣ س جتا س - س^{٢} جا س + س جتا س + ٢ س جتا س = صفر$$

تمارين

3

على المشتقات العليا للدالة

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد ص$^{(ن)}$ لكل من الدوال الآتية :

(١) ص = س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٦ س − ٤

(٢) ص = (٣ س^{٢} − ٤) (س + ٣)

(٣) ص = س^{٢} (س + ٢)^{٢}

(٤) ص = $\frac{س + ٢}{س - ٢}$

(٥) ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ١}$

(٦) ص = س $\sqrt{س + ٥}$

(٧) ص = س $\sqrt{س + ١}$

(٨) ص = $\sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}$

(٩) ص = جا (٥ س + ١)

(١٠) ص = ٢ س^{٢} + جتا ٣ س

(١١) ص = س جتا ٢ س

(١٢) ص = ٩ ظا $\frac{س}{٣}$

(١٣) ص = ٢ جا^{٢} س − ٥ جتا^{٢} س

(١٤) ص = س جا^{٢} س

٢ أوجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ لكل من الدوال الآتية عند قيم س المبينة أمام كل منها :

(١) ص = ٢ جا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٤}$ «−٨»

(٢) ص = جا س − جتا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$ «صفر»

(٣) ص = ٢ س جا س جتا س عند س = π «٤»

(٤) ص = س جتا س − جا س عند س = $\frac{\pi}{٢}$ «−١»

(٥) ص = $\frac{٢ س - ١}{س + ٣}$ عند س = −٢ «−١٤»

٣ أوجد المشتقة الثالثة لكل مما يأتى :

(١) ص = س^{٥} − ٤ س^{٣} + ٣

(٢) ص = جا س

(٣) ص = جتا (π − ٣ س)

(٤) ص = ٣ س + جا (٢ س − ٧)

(٥) ص = (٢ س + ٧)^{٤} + جا ٢ س

(٦) د (س) = $\frac{٢ س}{س + ١}$

(٧) ص = $\frac{س + ١}{س - ١}$

(٨) ص = ٢ س + $\frac{٣}{س}$

(٩) ص = $\sqrt{٢ س - ٥}$

(١٠) ص = س جا س

(١١) ص = جا س جتا س

(١٢) ص = ٢ $س^{٣}$ + س جتا ٢ س

٤ إذا كانت : ص = $س^{٥} - ١٠ س^{٤} + ٦٠ س^{٢} + ١٢٠$

أوجد قيمة : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ عندما $\frac{ء^{٤} ص}{ء س^{٤}} = ٠$ «-٢٠٠»

٥ أكمل ما يأتى :

(١) إذا كانت : د (س) = $س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٩ س - ٣$ فإن : د′ (٠) = ...

(٢) $\frac{ء^{٢}}{ء س^{٢}}$ (٥ $س^{٣} - ٧ س - ١٤$) = ... عند س = ١

(٣) (دورثان ٢٠١٤) إذا كان : د (س) = جا ٢ س فإن : د′ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(٤) إذا كان : ص = $س^{٩} - ١٤ س^{٧} - س^{٢} + ٣$ فإن : $\frac{ء^{١٠} ص}{ء س^{١٠}}$ = ...

(٥) إذا كان : ص = (٥ س - ٤) (س + ٣) ، ع = ٣ $س^{٢} - ٤ س + ١٧$

فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \frac{ء^{٢} ع}{ء س^{٢}}$ = ...

(٦) $\frac{ء^{٢}}{ء س^{٢}}$ $\left(\text{جتا}^{٢} \frac{س}{٢} - \text{جا}^{٢} \frac{س}{٢}\right)$ = ...

(٧) (السودان ٢٠١٤) إذا كانت : ص = - جا س فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ + ص = ...

(٨) إذا كان : (س + ص)° = ٣ فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(٩) إذا كان : د (س) = $\frac{س}{س - ٢}$ فإن : د′ (٣) = ...

٦ إذا كانت : ص = أ $س^{٣}$ + ب $س^{٢}$ + حـ س + ء وكانت ارتباطات س ، ص ، صَ ، صً موضحة بالجدول التالى أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، ء الحقيقية ثم أكمل الجدول :

س	ص	صَ	صً
١	٨		٢٨
٢		٧٥	٣٤

«١ ، ١١ ، ١٩ ، -٢٣»

٧ (دور أول ٢٠٠١) إذا كان : $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$ فأثبت أن : $ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + \left(\frac{د ص}{د س} \right)^{٢} + ١ = ٠$

٨ (دور ثان ٢٠٠٦) إذا كانت : $ص^{٢} + أ س^{٣} - ب س = حـ$ حيث : أ ، ب ، حـ ثوابت.

أثبت أن : $ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + \left(\frac{د ص}{د س} \right)^{٢} + ٣ أ س =$ صفر

٩ إذا كانت : $ص^{٢} = س^{٢} (١ - س)$

فأثبت أن : $ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + \left(\frac{د ص}{د س} \right)^{٢} + ٣ س = ١$

١٠ إذا كانت : $٤ ص^{٣} = ٣ س^{٢}$ أثبت أن : $٢ ص^{٢} \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٤ ص \left(\frac{د ص}{د س} \right)^{٢} = ١$

١١ (دور ثان ٢٠٠٢) إذا كانت : $س^{٣} + ص^{٣} = ١$ فأثبت أن : $ص^{٢} ص'' + ٢ ص ص'^{٢} + ٢ س = ٠$

١٢ (دور ثان ٢٠١٢) إذا كان : $س^{٣} ص^{٣} = ١$ فأثبت أن : $س^{٢} \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٢ ص$

١٣ (دور ثان ٢٠١٤) إذا كان : $س^{٢} ص = ٢ س + ٥$

فأثبت أن : $س^{٢} \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٤ س \frac{د ص}{د س} + ٢ ص =$ صفر

١٤ (دور ثان ٢٠١٠) إذا كان : $ص^{٢} = س$ فأثبت أن : $س \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ص \left(\frac{د ص}{د س} \right)^{٢} = ٠$

١٥ (دور أول ٢٠٠٣) إذا كان : $٢ س ص + ٣ = ٥ س^{٢}$

فأثبت أن : $س \left(\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} \right) + ٢ \left(\frac{د ص}{د س} \right) = ٥$

١٦ (دور أول ٢٠٠٥) إذا كان : $ص^{٢} = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$

فأثبت أن : $ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + \left(\frac{د ص}{د س} \right)^{٢} + \frac{٣}{س^{٤}} = ٠$

١٧ إذا كان : $٣ ص^{٤} = ٤ س^{٣}$ فأثبت أن : $ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٣ \left(\frac{د ص}{د س} \right)^{٢} = \frac{٢ س}{ص^{٢}}$

١٨ إذا كانت : ص = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ .

أثبت أن : $س^{٢} \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٣ س \frac{د ص}{د س} + ص$ = صفر

١٩ إذا كان : (١ + س) ص = $س^{٢}$ فأثبت أن : $(١ + س) \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٢ \frac{د ص}{د س} = ٢$

٢٠ إذا كانت : $ص^{٢} + س^{٢} ص^{٢} = ٨$

أثبت أن : $(س^{٢} + ١) \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٣ س \frac{د ص}{د س} + ص = ٠$.

٢١ (دور ثان ٢٠٠٨) إذا كان : $٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ فأثبت أن : $ص^{٣} \times \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ١٠٠ = ٠$.

٢٢ (دور أول ٢٠١٢) إذا كانت : س + ص = س ص فأثبت أن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٢ \left(\frac{ص}{س}\right)^{٣}$

٢٣ إذا كانت : $ص = \sqrt{٢ س + ٥}$ أثبت أن : $(٢ س + ٥) \frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} + ٣ \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٠$.

٢٤ إذا كانت : $ص = \left(س + \sqrt{١ + س^{٢}}\right)^{٥}$

أثبت أن : $(١ + س^{٢}) \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + س \frac{د ص}{د س} - ٢٥ ص = ٠$.

٢٥ إذا كان : $ص = \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$ أثبت أن : $(س^{٢} + ١) ص'' + ٣ س ص' = ٠$.

٢٦ إذا كانت : $ص \sqrt{١ + س^{٢}} = ١$

فأثبت أن : $(١ + س^{٢}) \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٣ س \frac{د ص}{د س} + ص = ٠$.

٢٧ إذا كانت : $ص^{٢} = \sqrt{٤ س + ١}$ ، $س > -\frac{١}{٤}$

أثبت أن : $٣ \left(\frac{د ص}{د س}\right)^{٢} + ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٠$.

٢٨ إذا كان : $ص^{٣} = ٣ س^{٤} - ٣ س^{٢} + ٥$

أثبت أن : $ص^{٢} \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٢ ص \left(\frac{د ص}{د س} \right)^{٢} + ٢ = ١٢ س^{٢}$

٢٩ إذا كان : $ص = \frac{س - ١}{س + ١}$ أوجد : $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$ ، $\frac{د^{٤} ص}{د س^{٤}}$ ثم استنتج : $\frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}}$

٣٠ (دور ثان ٢٠٠٥) إذا كان : $ص = جتا س$ فأثبت أن : $\left(\frac{د ص}{د س} \right)^{٢} - ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ١$

٣١ (دور أول ٢٠١٠) إذا كانت : $ص = ٢ جتا (٣ س + ١)$ فأثبت أن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٩ ص = ٠$

٣٢ إذا كان : $ص = ظا س$ أثبت أن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٢ ص (١ + ص^{٢})$

٣٣ إذا كان : $ص = قا س$ أثبت أن : $ص \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + \left(\frac{د ص}{د س} \right)^{٢} = ص^{٢} (٣ ص^{٢} - ٢)$

٣٤ إذا كان : $ص = جا ٢ س$ أثبت أن :

① $٤ \left(\frac{د ص}{د س} \right)^{٢} + \left(\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} \right)^{٢} = ١٦$ ② $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} + ٤ \frac{د ص}{د س} = ٠$

٣٥ إذا كان : $ص = جا ٣ س + جتا ٣ س$ أثبت أن :

① $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ٩ ص = ٠$ ② $\frac{د^{٤} ص}{د س^{٤}} = ٨١ ص$

٣٦ (دور ثان ٢٠٠٨) إذا كان : $ص = س جا س$ أثبت أن :

① $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + ص = ٢ جتا س$ ② $س \frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} + س \frac{د ص}{د س} + ٢ ص = ٠$

③ $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ دالة زوجية.

٣٧ إذا كان : $ص = \sqrt{١ + جا س}$ أثبت أن : $ص + ٤ \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٠$

٣٨ إذا كان : $ص = \frac{ع - ١}{ع}$ ، $ع = س^{٢} - ١$ أوجد : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند $س = ٠$ «٢»

٣٩ إذا كانت : ص = $\sqrt{ع + ١}$ ، ع = $س^{٢} - ١٠$ أوجد : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند س = ٥ « $\frac{-٩}{٦٤}$ »

٤٠ إذا كانت : ص = $ط^{ع}$ ، ع = ١٠ س + ٥ أوجد : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$

٤١ إذا كانت : ص = $س^{٣} + ٢$ ، ع = $س^{٢} + ٣$ فأوجد : $\frac{د^{٢} ع}{د ص^{٢}}$ عند س = $\frac{١}{٣}$ « -١٨ »

٤٢ إذا كانت : س = $٣ ن^{٢} - ١$ ، ص = $ن^{٣} + ٢$ أوجد : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند ن = ٤ « $\frac{١}{٤٨}$ »

٤٣ إذا كانت : س = $٢ ن^{٣} + ٣$ ، ص = $ن^{٤}$ أوجد : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند ن = ١ « $\frac{١}{٩}$ »

٤٤ إذا كانت : س = $ع^{٢} - ٢ ع$ ، ص = $ع^{٢}$

أوجد : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ ، $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$ عند ع = ٢ « $\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ »

٤٥ إذا كان : $\frac{د ع}{د س} = ١ + ٢ س$ ، $\frac{د ص}{د س} = س^{٢} + ٣$

فأوجد : $\frac{د^{٢} ع}{د ص^{٢}}$ عند س = ١ « $\frac{١}{٣٢}$ »

٤٦ إذا كانت : ص = $\frac{٢ س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$ ، ع = $\frac{\sqrt{١ + س^{٢}}}{س}$

أثبت أن : $\frac{د ص}{د س} = \frac{-٢}{ع^{٢}} \cdot \frac{د ع}{د س}$

٤٧ إذا كانت : ص ، ع ، ل دوالًا قابلة للاشتقاق

حيث ص = $\sqrt{ع}$ ، ع = $٣ - ٢ ل^{٢}$ ، ل = ٤ س

فأثبت أن : ص . $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + \left(\frac{د ص}{د س}\right)^{٢} + ٣٢ = ٠$

٤٨ إذا كانت : ص = $(س^{٢} + ١)(س - ٢)$ ، ع = $(س + ٧)(س - ٢)$

فأثبت أن : $(٢ س + ٥)^{٣} \frac{د^{٢} ص}{د ع^{٢}} = ٦ س^{٢} + ٣٠ س - ٢٢$

٤٩ إذا كان : س = $ظا ع$ ، $\sqrt{ص} = ط^{ع}$ أثبت أن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٢$

٥٠ أكمل ما يأتى :

① إذا كان : د (س) = أ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ س + ١ وكان : د$'$ (١) = ٦

فإن : أ = ...

② $\frac{ء^{٢}}{ء س^{٢}}$ (جتا^{٤} س + جا^{٤} س) = ...

③ $\frac{ء^{٣}}{ء س^{٣}}$ (جا^{٢} س) = ...

④ إذا كان : س = $\frac{ن}{ن + ١}$ ، ص = $\frac{ن + ١}{ن}$ فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = $\frac{.....}{س^{٢}}$

⑤ إذا كانت : س = ن^{٢} − ١ ، ص = ن^{٣} − ٤ فإن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ... عند ن = ٢

⑥ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} أ س^{٢} + ب س + حـ & ، س < ٠ \\ ٢ س + ٥ & ، س \geq ٠ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق مرتين عند س = ٠

فإن : أ = ... ، ب = ... ، حـ = ...

⑦ إذا كانت : د (س) هى قاعدة دالة كثيرة حدود

فإن : نهـــــا $\frac{د' (س + هـ) - د' (س)}{هـ}$ = ...
هـ ← ٠

⑧ إذا كانت : د (س) = جتا ٣ س جتا س − جا ٣ س جا س

فإن : د$'$ $\left(\frac{\pi}{٤} \right)$ = ...

⑨ إذا كانت : ص = د (س) وكان د (س + هـ) − د (س) = ٥ س^{٢} هـ + هـ^{٢}

فإن : $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ = ...

⑩ إذا كانت : د (س + ١) = س^{٢} + ٢ س + ١ فإن : د$'$ (٣) = ...

⑪ إذا كانت : د (س) = ٢ جا $\frac{س}{٢}$ جتا $\frac{س}{٢}$ فإن المشتقة رقم ١٠٠٠ لهذه الدالة تساوى

(١٢) إذا كانت : د (س) = $\frac{س^{٢٥}}{|٢٥}$ فإن : د$^{(٢٥)}$ (س) = ...

(١٣) إذا كان : ص = س^{ن} حيث ن عدد طبيعي

وكان $\frac{ء^{٤} ص}{ء س^{٤}}$ = ٣٦٠ س$^{ن-٤}$ فإن : قيمة ن = ...

(١٤) إذا كانت : ص = ١ + $\frac{س}{|١}$ + $\frac{س^{٢}}{|٢}$ + $\frac{س^{٣}}{|٣}$ + ... إلى ∞

فإن : ٥ صً − ٢ صَ − ٣ ص = ...

(١٥) إذا كانت : د (س) ، ر (س) دالتين قابلتين للاشتقاق عند س = ٢

وكان ق (س) = د (س) . ر (س) حيث : د (٢) = ٢ دَ (٢) = ٣ دً (٢) = ١٢

، ر (٢) = ٣ رَ (٢) = ٤ رً (٢) = ٦ فإن : قً (٢) = ...

(١٦) إذا كانت : د ، ر دالتين حيث : د (س) = س^{٢} ، ر (٢) = ٣

، رَ (٢) = −٢ ، رً (٢) = ٥ فإن : (د ○ ر)ً (٢) = ...

٥١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (ن) = س^{٤} حيث س ثابت فإذا دً (ن) = ...

(أ) ١٢ س^{٢} (ب) ٤ س^{٣} (جـ) صفر (د) ١٢ ن^{٢}

(٢) إذا كان : ص = س^{٢} + ٢ س وكان : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ − ص − ٣ = صفر

فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −١ (د) −٢

(٣) إذا كان : د (س) = (س − ٣)$^{-١}$ فإن : دً (٣) = ...

(أ) صفر (ب) −٦ (جـ) غير معرفة. (د) ٢

(٤) إذا كان : ص = س^{٧} فإن : $\frac{ء^{٧} ص}{ء س^{٧}}$ = ...

(أ) ٧ س^{٦} (ب) ٤٢ س^{٥} (جـ) ٤٩ (د) |٧

(٥) إذا كانت : د (س) = ط^{س} فإن : دً ($\frac{\pi}{٤}$) تساوى

(أ) −$\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{٩}{٢}$

(٦) إذا كان : د (س) = جا ٢ س جتا ٢ س فإن : دً ($\frac{\pi}{٣}$) يساوى

(أ) −٤ (ب) صفر (جـ) ٤ $\sqrt{٣}$ (د) ٨

⑦ إذا كان : ص = س^{ن} حيث : س ≠ ٠ ، ن > صفر

فإن : أقل قيمة لـ ن تجعل $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$ ≠ صفر هى

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑧ إذا كانت ص = د (س) تحقق العلاقة : $\frac{د^{٤} ص}{د س^{٤}}$ = ص فإن : ص = ...

(أ) (س + ١)^{٤} (ب) جا س (جـ) ظا س (د) مقدار ثابت.

⑨ إذا كانت : د (جا س) = جا^{٢} س فإن : د$'$ (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) π (د) $\frac{\pi}{٢}$

⑩ إذا كان : ص = س$^{ن+١}$ + ن س$^{ن-١}$ + ١ فإن : $\frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}}$ = ...

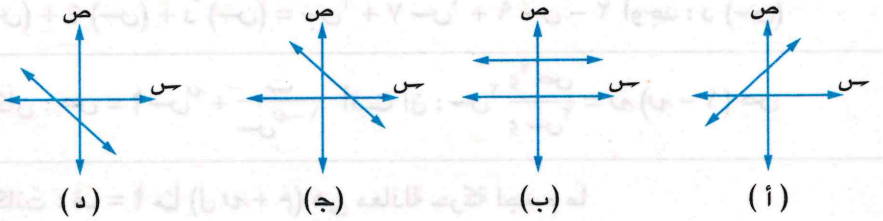
(أ) $\underline{|ن+١}$ (ب) س $\underline{|ن+١}$ (جـ) س $\underline{|ن}$ (د) س$^{-١}$ $\underline{|ن}$

⑪ 📖 إذا كانت : د$'$ (س) = س د (س) ، د (٣) = −٥ فإن : د$'$ (٣) = ...

(أ) −٥٠ (ب) −٤٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٧

⑫ إذا كانت : ص = أ س^{ن} − ب س$^{ن+١}$ + ٥ كثيرة حدود ، أ ، ب ∈ ح$^{+}$

فإن : $\frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}}$ يمكن أن يمثلها أحد الأشكال الآتية :



(أ) (ب) (جـ) (د)

٥٢ 📖 (دور أول ٢٠٠٨) إذا كان : س ص = جا س جتا س

فأثبت أن : س $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ٢ $\frac{د ص}{د س}$ + ٤ س ص = صفر

٥٣ (دور أول ٢٠١٣) إذا كان : جا س = س ص

فأثبت أن : س^{٢} (ص + ص$_{١}$) + ٢ جتا س = ٢ ص

٥٤ إذا كان : ص = س ظا س فأثبت أن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ٢ (١ + ص) ظا^{٢} س

٥٥ إذا كانت : س ص = جا ٢ س أثبت أن : س $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ٢ $\frac{د ص}{د س}$ + ٤ ٢ س ص = ٠

٥٦ إذا كانت : ص = ٢ جتا س^{٢} + ب جا س^{٢}

أثبت أن : س $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ − $\frac{د ص}{د س}$ + ٤ س^{٣} ص = ٠

٥٧ (دور أول ٢٠٠٩) إذا كان : س ص = ٢ (حيث : ٢ عدد حقيقى موجب) ،

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} \times \frac{د^{٢} س}{د ص^{٢}} < \frac{د ص}{د س} \times \frac{د س}{د ص}$ فأوجد الفترة التى ينتمى إليها ٢ «٢ ∈]٠ ، ٤[»

٥٨ إذا كان ص = ٢ س^{٣} + ب س^{٢} وكان : $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$ = ١٢ ، $\left(\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}\right)_{س = ١}$ = ٦

فأوجد : ٢ ، ب «٢ ، −٣»

٥٩ إذا كان د (س) كثيرة حدود وكان

د (س) + د$'$ (س) + د$''$ (س) = س^{٣} + ٧ س^{٢} + ٩ س − ٢ أوجد : د (س)

٦٠ إذا كان : ص = ٢ س^{ن} + $\frac{ب}{س^{ن-١}}$ أثبت أن : س^{٢} $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ن (ن − ١) ص

٦١ إذا كانت : ف = ٢ جتا (ل ن + م) هى معادلة حركة لجسم ما

حيث : ٢ ، ل ، م ثوابت فأثبت أن : $\frac{د^{٢} ف}{د ن^{٢}}$ + ل^{٢} ف = ٠

٦٢ إذا كان : ص = ٢ جا س + ب جتا س فأثبت أن : $\frac{د ص}{د س}$ + $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$ = $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + $\frac{د^{٤} ص}{د س^{٤}}$

٦٣ إذا كانت : ص = د (ع) ، ع = ر (س)

أثبت أن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = د′ (ع) [ر′ (س)]^{٢} + ر′ (س) د′ (ع)

٦٤ إذا كانت : ص = جتا ٢ س استكشف نمط الاشتقاق المتتالى ثم أوجد :

① ص$_{(١٥)}$ ② ص$_{(٢٠٢٠)}$

٦٥ إذا كانت : ص = جا ٢ س استكشف نمط الاشتقاق المتتالى ثم أوجد :

① ص$_{(٢٥)}$ ② ص$_{(٢٠١٦)}$

٦٦ إذا كانت : ص = س جتا س + جا س

فأثبت أن : س . $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$ + س . $\frac{د ص}{د س}$ + ٢ ص = ٢ جا س

٦٧ إذا كان : جا ص + جتا ٢ س = ٠

أثبت أن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ − ($\frac{د ص}{د س}$)^{٢} ظا ص = ٤ جتا ٢ س قا ص

٦٨ إذا كان : جا ٢ س − جتا ٣ ص = ٠

أثبت أن : ٣ ظا ٣ ص $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ٩ ($\frac{د ص}{د س}$)^{٢} − ٤ = ٠

٦٩ إذا كانت : ص = ظا^{٢} س فأثبت أن : $\frac{١}{٢}$ $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = (١ + ص) (١ + ٣ ص)

٧٠ إذا كانت : س = جا ص أثبت أن : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = $\frac{س}{(١ - س^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$

٧١ (دور أول ٢٠١٦) إذا كانت : ص = $\frac{أ س + ب}{حـ س + ء}$ حيث أ ، ب ، حـ ، ء ثوابت

أثبت أن : ٢ ($\frac{د ص}{د س}$) ($\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$) = ٣ ($\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$)^{٢}

الدرس 4

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى

ميل الخط المستقيم

① ميل الخط المستقيم الذى معادلته : أ س + ب ص + حـ = ٠ هو $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$

فمثلًا : ميل المستقيم الذى معادلته : ٥ س + ٢ ص + ٧ = ٠ هو $\frac{-٥}{٢}$

② ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

يساوى $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

فمثلًا : ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -٣) ، (٤ ، ١) هو $\frac{١ + ٣}{٤ - ٢} = ٢$

③ ميل المستقيم = ظا هـ

حيث (هـ) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فمثلًا : ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو ظا ١٣٥° = -١

④ إذا كان : $\overrightarrow{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{ب}{أ}$

فمثلًا : إذا كان (٢ ، -٣) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{-٣}{٢}$

⑤ ميل المستقيم يكون موجبًا إذا كان يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

⑥ ميل المستقيم يكون سالبًا إذا كان يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

⑦ ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر

⑧ ميل محور الصادات = ميل أى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) = $\frac{١}{\text{صفر}}$ «غير معرف»

العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمتعامدين

إذا كان : $ل_1$ ، $ل_2$ مستقيمين ميلاهما $م_1$ ، $م_2$ على الترتيب فإن :

① $ل_1 // ل_2 \iff م_1 = م_2$

② $ل_1 \perp ل_2 \iff م_1 \times م_2 = -1$ (مالم يوازى أحدهما أحد المحورين)

فمثلًا : إذا كان ميل مستقيم = $\frac{3}{2}$ فإن : ميل المستقيم الذى يوازيه = $\frac{3}{2}$

وميل المستقيم العمودى عليه = $\frac{-2}{3}$

معادلة الخط المستقيم

① المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة $\overrightarrow{و} = (س_1 ، ص_1)$ والمتجه $\overrightarrow{ى} = (أ ، ب)$

متجه اتجاه له هى $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{و} + ك \overrightarrow{ى}$ حيث $ك \in ح$

② **المعادلة الكارتيزية :**

* بدلالة نقطة عليه $(س_1 ، ص_1)$ والميل (م) هى $(ص - ص_1) = م (س - س_1)$

* بدلالة الميل (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات (حـ) هى $ص = م س + حـ$

* بدلالة الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات هى $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = 1$

ملاحظات

① معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $ص = ك$

② معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $س = ل$

③ معادلة محور السينات هى $ص = 0$ ④ معادلة محور الصادات هى $س = 0$

⑤ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل هى $ص = م س$

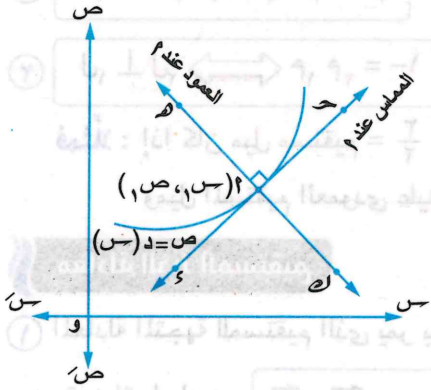
⑥ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س

⑦ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

⑧ لإيجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما آنيًا.

تعاريف

* ميل منحنى عند نقطة عليه هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة.
* العمودى على المنحنى هو العمودى على المماس للمنحنى عند نقطة التماس.



ففى الشكل المقابل :

ميل المنحنى ص = د (س) عند النقطة

أ (س١ ، ص١) الواقعة عليه هو ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ح ء}$ الذى يمس المنحنى عند أ بينما العمودى

على نفس المنحنى عند نفس النقطة أ هو المستقيم $\overleftrightarrow{ل ه}$ العمودى على $\overleftrightarrow{ح ء}$

* زاوية التقاطع بين مستقيم ومنحنى هى الزاوية المحصورة بين المستقيم والمماس للمنحنى عند نقطة التقاطع.
* زاوية التقاطع بين منحنيين هى الزاوية بين المماسين للمنحنيين عند نقط تقاطع المنحنيين.
* نقول أن المنحنيين يتقاطعان على التعامد إذا كان المماسان المرسومان لهما من نقطة تقاطعهما متعامدين.

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميل المماس والعمودى على منحنى

* ميل المماس لمنحنى الدالة [ص = د (س)] عند النقطة أ (س١ ، ص١)

الواقعة عليه = $\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{(س_١ ، ص_١)}$

* ميل العمودى على منحنى الدالة [ص = د (س)] عند النقطة أ (س١ ، ص١)

الواقعة عليه = $\frac{-١}{\left[\frac{ء ص}{ء س}\right]_{(س_١ ، ص_١)}}$

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى

إذا كانت (س$_1$ ، ص$_1$) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث : ص = د (س)

، م ميل المماس عند هذه النقطة أى : م = $\left[\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right]_{(\text{س}_1\ ،\ \text{ص}_1)}$ فإن :

* معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) هى : ص − ص$_1$ = م (س − س$_1$)

* معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) هى : ص − ص$_1$ = $\frac{-1}{\text{م}}$ (س − س$_1$)

مثال ١

أوجد النقط التى تقع على المنحنى : ص = س^2 − ٤ س + ٣ والتى عندها يكون المماس للمنحنى

(١) يوازى محور السينات.

(٢) يوازى المستقيم : ص − ٢ س + ٣ = ٠

(٣) عمودى على المستقيم : ٦ ص − ٣ س − ٥ = ٠

الحل

∵ ص = س^2 − ٤ س + ٣ ∴ ميل المماس = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٢ س − ٤

(١) ∵ المماس يوازى محور السينات ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠ ∴ ٢ س − ٤ = ٠

∴ س = ٢ ومنها ص = −١ ∴ النقطة هى (٢ ، −١)

(٢) ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-(-2)}{1}$ = ٢ ∴ ميل المماس = ٢ ∴ ٢ س − ٤ = ٢

∴ س = ٣ ومنها ص = ٠ ∴ النقطة هى (٣ ، ٠)

(٣) ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-(-3)}{6}$ = $\frac{1}{2}$ ∴ ميل المستقيم العمودى عليه = −٢

∴ ميل المماس = −٢ ∴ ٢ س − ٤ = −٢

∴ س = ١ ومنها ص = ٠ ∴ النقطة هى (١ ، ٠)

مثال ٢

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٢ ص = ٢٠$

عند النقطة $(-١ ، ٣)$ الواقعة عليه.

الحل

$\because س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٢ ص = ٢٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ س + ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} - ٤ + ٢ \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore (٢ ص + ٢) \frac{ء ص}{ء س} = ٤ - ٢ س$ $\quad \therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٤ - ٢ س}{٢ ص + ٢}$

$\therefore$ ميل المماس عند النقطة $(-١ ، ٣) = \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{(-١ ، ٣)} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore$ معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة هى :

$ص - ٣ = \frac{٣}{٤} (س + ١)$ أى $٤ ص - ٣ س - ١٥ = ٠$

، معادلة العمودى على المنحنى عند نفس النقطة هى :

$ص - ٣ = \frac{-٤}{٣} (س + ١)$ أى $٣ ص + ٤ س - ٥ = ٠$

مثال ٣

أوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة : $ص = س^{٢} + ٢ س - ٣$ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع

(١) محور الصادات. (٢) المستقيم : $ص = -٤$

(٣) المستقيم : $ص - س + ١ = ٠$

الحل

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة $(س ، ص)$ عليه $= \frac{ء ص}{ء س} = ٢ س + ٢$

(١) نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع $س = ٠$

$\therefore ص = -٣$ $\quad \therefore$ نقطة التقاطع هى $(٠ ، -٣)$

$\therefore$ ميل المماس $= ٢$ وميل العمودى $= \frac{-١}{٢}$

$\therefore$ معادلة العمودى هى $(ص + ٣) = \frac{-١}{٢} (س - ٠)$ أى $س + ٢ ص + ٦ = ٠$

② نوجد نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم بوضع ص = −٤

∴ −٤ = س^{٢} + ٢ س − ٣ ∴ س^{٢} + ٢ س + ١ = ٠

∴ (س + ١)^{٢} = ٠ ∴ س = −١

∴ نقطة التقاطع هى (−١ ، −٤) ∴ ميل المماس عندها = ٠

∴ ميل العمودى غير معرف

أى أن المستقيم العمودى يكون رأسيًا (موازيًا لمحور الصادات) ويمر بالنقطة (−١ ، −٤)

∴ معادلة العمودى هى س = −١

③ نوجد نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم بحل معادلتيهما آنيًا

∵ ص = س^{٢} + ٢ س − ٣ (١)

، ص = س − ١ (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) ∴ س − ١ = س^{٢} + ٢ س − ٣

∴ س^{٢} + س − ٢ = ٠ ∴ (س − ١) (س + ٢) = ٠

∴ س = ١ ومنها ص = ٠ أ، س = −٢ ومنها ص = −٣

∴ نقط التقاطع هى (١ ، ٠) ، (−٢ ، −٣)

∴ عند النقطة (١ ، ٠)

∵ ميل المماس = ٤ ∴ ميل العمودى = $-\frac{١}{٤}$

∴ معادلة العمودى هى (ص − ٠) = $\frac{-١}{٤}$ (س − ١) أى ٤ ص + س − ١ = ٠

، عند النقطة (−٢ ، −٣)

∴ ميل المماس = −٢ ∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة العمودى هى (ص + ٣) = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢) أى ٢ ص − س + ٤ = ٠

مثال ٤

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : ص = ٣ + ظا س − قا^{٢} س عند النقطة التى تقع على المنحنى وإحداثيها السينى يساوى $\frac{\pi}{٤}$

الحل

عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ ص = ٣ + ظا $\frac{\pi}{٤}$ − قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ = ٢

∴ النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٢) تقع على المنحنى

∵ $\frac{ء ص}{ء س}$ = − قا^{٢} س − ٢ قا س × قا س ظا س = − قا^{٢} س − ٢ ظا س قا^{٢} س ،

∴ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{س = \frac{\pi}{٤}}$ = − قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ − ٢ ظا $\frac{\pi}{٤}$ قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ = − ٦

∴ ميل المماس = − ٦ ، ميل العمودى = $\frac{١}{٦}$

∴ معادلة المماس هى (ص − ٢) = − ٦ (س − $\frac{\pi}{٤}$) أى : ٢ ص + ١٢ س = ٤ + ٣ π

، معادلة العمودى هى (ص − ٢) = $\frac{١}{٦}$ (س − $\frac{\pi}{٤}$) أى : ٢٤ ص − ٤ س = ٤٨ − π

مثال ٥

أوجد معادلتى كل من المماس والعمودى عليه للمنحنى :

س = ن^{٢} − ٢ ، ص = ن^{٤} + ٣ ن^{٢} + ١ عند ن = ١

الحل

∵ س = ن^{٢} − ٢ ∴ $\frac{ء س}{ء ن}$ = ٢ ن

، ص = ن^{٤} + ٣ ن^{٢} + ١ ∴ $\frac{ء ص}{ء ن}$ = ٤ ن^{٣} + ٦ ن

∵ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ء ص}{ء ن}$ ÷ $\frac{ء س}{ء ن}$ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{٤ ن^{٣} + ٦ ن}{٢ ن}$ = ٢ ن^{٢} + ٣

، عند $ن = ١$: $\frac{ص}{س} = ٢ (١)^{٢} + ٣ = ٥$

∴ ميل المماس = ٥ ، ميل العمودى = $\frac{-١}{٥}$

، $س = (١)^{٢} - ٢ = -١$ ، $ص = (١)^{٤} + ٣ (١)^{٢} + ١ = ٥$

أى أن النقطة (-١ ، ٥) تقع على المنحنى وعندها يكون :

معادلة المماس هى (ص - ٥) = ٥ (س + ١) أى ص - ٥ س - ١٠ = ٠

، معادلة العمودى هى (ص - ٥) = $-\frac{١}{٥}$ (س + ١) أى س + ٥ ص - ٢٤ = ٠

مثال ٦

أوجد معادلتى كل من المماس والعمودى عليه للمنحنى :

$س = ٥ + ط\theta$ ، $ص = ح\theta^{٢} + \sqrt{٢}\, ج\theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$

الحل

∵ $س = ٥ + ط\theta$ ∴ $\frac{س}{\theta} = -ق\theta^{٢}$

، $ص = ح\theta^{٢} + \sqrt{٢}\, ج\theta$ ∴ $\frac{ص}{\theta} = -٢ ح\theta ح\theta + \sqrt{٢}\, ج\theta ط\theta$

، ∵ $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{\theta} \div \frac{س}{\theta}$ ∴ $\frac{ص}{س} = \frac{-٢ ح\theta ح\theta + \sqrt{٢}\, ج\theta ط\theta}{-ق\theta^{٢}}$

، عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$: $\frac{ص}{س} = \frac{-٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times ١}{-(\sqrt{٢})^{٢}} = \frac{-١}{٢}$

∴ ميل المماس = $\frac{-١}{٢}$ ، ميل العمودى = ٢

، $س = ٥ + ط\frac{\pi}{٤} = ٦$ ، $ص = ح\frac{\pi}{٤}^{٢} + \sqrt{٢}\, ج\frac{\pi}{٤} = \frac{٥}{٢}$

أى أن النقطة $(٦ ، \frac{٥}{٢})$ تقع على المنحنى وعندها يكون :

معادلة المماس هى : $(ص - \frac{٥}{٢}) = \frac{-١}{٢} (س - ٦)$ أى : ٢ ص + س - ١١ = ٠

، معادلة العمودى هى : $(ص - \frac{٥}{٢}) = ٢ (س - ٦)$ أى : ٢ ص - ٤ س + ١٩ = ٠

مثال ٧

أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : $س^{٢} + ص^{٢} = ٤٠$ الموازيين للمستقيم $ص + ٣ س = ٥$

الحل

$\because س^{٢} + ص^{٢} = ٤٠$ $\therefore ٢ س + ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{- س}{ص}$

، $\because$ المماس // المستقيم $ص + ٣ س = ٥$ $\therefore$ ميل المماس = ميل المستقيم $= -٣$

$\therefore \frac{- س}{ص} = -٣$ $\therefore س = ٣ ص$

وبالتعويض فى معادلة المنحنى : $\therefore (٣ ص)^{٢} + ص^{٢} = ٤٠$

$\therefore ٩ ص^{٢} + ص^{٢} = ٤٠$ $\therefore ١٠ ص^{٢} = ٤٠$

$\therefore ص^{٢} = ٤$ $\therefore ص = \pm ٢$ ومنها $س = \pm ٦$

$\therefore$ نقط التماس هى $(٦ ، ٢)$ ، $(-٦ ، -٢)$

$\therefore$ معادلة أحد المماسين هى $(ص - ٢) = -٣ (س - ٦)$ أى $ص + ٣ س - ٢٠ = ٠$

ومعادلة المماس الآخر هى $(ص + ٢) = -٣ (س + ٦)$ أى $ص + ٣ س + ٢٠ = ٠$

مثال ٨

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : $ص = \frac{ظا س}{١ - ظا^{٢} س}$ عند النقطة $س = \frac{\pi}{٣}$

الحل

$\because ظا ٢ س = \frac{٢ ظا س}{١ - ظا^{٢} س}$ $\therefore ص = \frac{١}{٢} ظا ٢ س$

$\therefore ص' = ق ا^{٢} ٢ س$

، عند $س = \frac{\pi}{٣}$ $\therefore ص = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ نقطة التماس هى $\left(\frac{\pi}{٣} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$ $\therefore (ص')\left(\frac{\pi}{٣} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right) = ق ا^{٢} \frac{\pi}{٣} ٢ = ٤$

$\therefore$ معادلة المماس هى : $ص + \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٤ \left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$

أى $٦ ص - ٢٤ س + ٣ \sqrt{٣} + ٨ \pi = ٠$

مثال ٩

أثبت أنه يمكن رسم مماسين من النقطة (٠ ، -٤) للمنحنى ص = س^{٢} وأوجد معادلة كل منهما.

الحل

∵ ص = س^{٢} ∴ ميل المماس = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ س

وبفرض أن المماس المرسوم للمنحنى من النقطة (٠ ، -٤) يمس المنحنى عند النقطة (أ ، ب)

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ أ (١)

، ∵ (أ ، ب) ∈ للمنحنى ∴ ب = أ^{٢} ∴ (أ ، أ^{٢}) هى نقطة التماس

∴ المماس يمر بالنقطتين (٠ ، -٤) ، (أ ، أ^{٢}) ∴ ميل المماس = $\frac{\text{أ}^{٢} + ٤}{\text{أ} - ٠}$ = $\frac{\text{أ}^{٢} + ٤}{\text{أ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أ}^{٢} + ٤}{\text{أ}}$ = ٢ أ ∴ ٢ أ^{٢} = أ^{٢} + ٤

∴ أ^{٢} = ٤ ∴ أ = ± ٢

∴ نقط التماس هى (٢ ، ٤) ، (-٢ ، ٤)

∴ يمكن رسم مماسين لهذا المنحنى من النقطة (٠ ، -٤) يمسان المنحنى

(١) عند النقطة (٢ ، ٤) : ∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ × ٢ = ٤

∴ معادلة أحد المماسين هى (ص + ٤) = ٤ (س - ٠) أى ص - ٤ س + ٤ = ٠

(٢) عند النقطة (-٢ ، ٤) : ∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ × -٢ = -٤

∴ معادلة المماس الآخر هى (ص + ٤) = -٤ (س - ٠) أى ص + ٤ س + ٤ = ٠

مثال ١٠

أثبت أن المنحنيين : ص = ٢ س^{٢} - ٣ س + ٨ ، ص = س^{٢} - ٣ س + ٩

يتقاطعان على التعامد عند النقطة التى إحداثيها السينى = ١

الحل

بالتعويض عن س = ١ فى معادلة المنحنى الأول ∴ ص = ٧

∴ (١ ، ٧) تقع على المنحنى الأول

وبالمثل فى معادلة المنحنى الثانى. ∴ ص = ٧

∴ (١ ، ٧) تقع على المنحنى الثانى.

أى أن : (١ ، ٧) هى إحدى نقط تقاطع المنحنيين.

* **بالنسبة للمنحنى الأول :** $\frac{ء ص}{ء س} = ٤ س - ٣$ ∴ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{س=١} = ١$

* **بالنسبة للمنحنى الثانى :** $\frac{ء ص}{ء س} = ٢ س - ٣$ ∴ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{س=١} = -١$

∴ حاصل ضرب ميلى المماسين للمنحنيين = ١ × −١ = −١

∴ المماسان للمنحنيين عند النقطة (١ ، ٧) متعامدان.

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، ٧)

مثال ١١

أثبت أن المنحنيين : ص = ٢ س^{٢} + س + ١ ، ص = س^{٢} − س متماسان

وأوجد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة التماس.

الحل

∵ ص = ٢ س^{٢} + س + ١ (١) ، ص = س^{٢} − س (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) معًا :

∴ ٢ س^{٢} + س + ١ = س^{٢} − س ∴ س^{٢} + ٢ س + ١ = ٠

∴ (س + ١)^{٢} = ٠ ∴ س = −١

وبالتعويض فى (٢) : ∴ ص = ٢ ∴ المنحنيان يتقاطعان فى النقطة (−١ ، ٢)

، م$_{١}$ (ميل المماس للمنحنى الأول عند (−١ ، ٢)) = $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{(-١ ، ٢)}$

= (٤ س + ١)$_{س=-١}$ = −٣

، $م_2$ (ميل المماس للمنحنى الثانى عند (−١ ، ٢)) = $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{(-١ ، ٢)}$

= (٢ س − ١)$_{س = -١}$ = −٣

، ∵ $م_1 = م_2$ عند نفس النقطة (−١ ، ٢) ∴ المنحنيان متماسان عند النقطة (−١ ، ٢)

، معادلة المماس المشترك هى (ص − ٢) = −٣ (س + ١) أى ص + ٣ س + ١ = ٠

معلومة إثرائية

عند إيجاد نقط تقاطع منحنيين وكان أحد نقاط التقاطع جذر مكرر مرتين فهذه النقطة هى نقطة تماس مباشرة دون إثبات أن ميلى المماسين للمنحنيين عند هذه النقطة متساويين ففى المثال السابق نجد أن حل المعادلتين معًا يعطى $س^2$ + ٢ س + ١ = ٠ وهو مقدار مربع كامل فيه الجذرين متساويين.

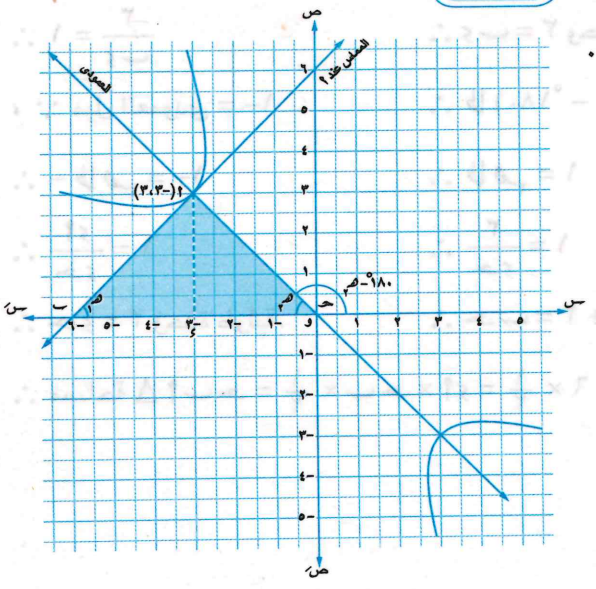
أى أن : س = −١ جذر مكرر مرتين. ∴ المنحنيان متماسان عند النقطة (−١ ، ٢)

مثال ١٢

أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور السينات والمماس والعمودى للمنحنى :

$س^2$ + ٣ س ص + $ص^2$ + ٩ = ٠ عند النقطة أ (−٣ ، ٣) الواقعة عليه

الحل



∵ $س^2$ + ٣ س ص + $ص^2$ + ٩ = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س + ٣ س $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٣ ص

+ ٢ ص $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-(٢ س + ٣ ص)}{(٣ س + ٢ ص)}$

∴ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{(-٣ ، ٣)}$ = ١

∴ ميل المماس = ١

∴ معادلة المماس هى : (ص − ٣) = ١ (س + ٣) أى ص = س + ٦

لإيجاد ب نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س = −٦ ∴ ب = (−٦ ، ٠)

، ∵ ميل العمودى = −١

∴ معادلة العمودى هى : (ص − ٣) = −١ (س + ٣) أى : ص = − س

لإيجاد حـ نقطة تقاطع العمودى مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س = ٠ ∴ حـ = (٠ ، ٠)

∴ طول $\overline{ب حـ}$ = ٠ − (−٦) = ٦ وحدة طولية

∴ مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ × اء = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مربعة.

حل آخر :

∵ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{(-٣ ، ٣)}$ = ١ ∴ ميل المماس = ١

، ∵ ميل المماس = ظا $هـ_١$ ∴ ظا $هـ_١$ = $\frac{ا ء}{ء ب}$

∴ ١ = $\frac{٣}{ء ب}$ ∴ ء ب = ٣ وحدة طولية.

، ∵ ميل العمودى = −١ ∴ ظا (١٨٠° − $هـ_٢$) = −١

∴ − ظا $هـ_٢$ = −١ ∴ ظا $هـ_٢$ = ١

∴ $\frac{ا ء}{حـ ء}$ = ١ ∴ $\frac{٣}{حـ ء}$ = ١

∴ حـ ء = ٣ وحدة طولية. ∴ حـ ب = ٣ + ٣ = ٦ وحدة طولية.

∴ مساحة Δ ا ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ب حـ × اء = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مربعة.

تمارين

4

على معادلتى المماس والعمودى لمنحنى

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد ميل المماس للمنحنى : $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س + ٤ ص - ٨ = ٠$
عند نقطة تقاطعه مع محور السينات. «$-\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$»

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : $س^{٢} + ٣ س ص + ص^{٢} = ٥$
مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وذلك عند النقطة (١ ، ١) «١٣٥°»

٣ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها مماس المنحنى : $ص^{٣} = س^{٢}$ مع الاتجاه
الموجب لمحور السينات عند $س = ٨$ لأقرب دقيقة. «$١٨^{\circ}\ ٢٦'$»

٤ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $٣ ص^{٢} - ٦ ص + س^{٢} = ٠$ والتى عندها المماس لهذا المنحنى
(١) موازيًا لمحور السينات. (٢) موازيًا لمحور الصادات.
(٣) يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٥ (دور ثان ٢٠١١) ، (دور أول ٢٠٠٤) أوجد النقط على المنحنى : $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٣$
والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا لمحور الصادات. «(٢ ، -١) ، (-٢ ، ١)»

٦ (دور أول ٢٠٠٢) أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $س^{٢} + ص^{٢} = ٨$ والتى يكون عندها
المماس للمنحنى عموديًا على المستقيم $ص = ٤ - س$ «(٢ ، -٢) ، (-٢ ، ٢)»

٧ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٦$ والتى عندها يكون المماس عموديًا
على المستقيم $٣ س - ٦ ص = ٧$ «(٤ ، ١٦)»

٨ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $ص^{٢} - س^{٢} = ٧$ والتى عندها المماس يصنع زاوية
جيب تمامها $\frac{٤}{٥}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. «(٣ ، ٤) ، (-٣ ، -٤)»

٩ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : $ص = ظا س$ حيث $س \in [٠ ، ٢\pi[- \{\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\}$
والتى عندها يكون المماس
(١) موازيًا للمستقيم : $٢ س - ص = ٣$ (٢) له متجه اتجاه $\overrightarrow{ى} = (١ ، ٤)$

١٠ إذا كانت : ص = − ظا س حيث س ∈]٠ ، ٢π[− {π}

فأوجد النقط الواقعة على منحنى هذه الدالة والتى عندها يكون المماس موازيًا للمستقيم

٢ ص − ٨ س + ٧ = ٠ «$(\frac{\pi}{٦}، -\sqrt{٣})$ ، $(\frac{\pi ٥}{٦}، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{\pi ٧}{٦}، -\sqrt{٣})$ ، $(\frac{\pi ١١}{٦}، \sqrt{٣})$»

١١ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = جا س جتا س والتى عندها يكون المماس عموديًا على المستقيم : ص = س حيث س ∈]٠ ، π[«$(٠، \frac{\pi}{٢})$»

١٢ أوجد الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص = $\frac{٢ س - ١}{٣ س - ٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١ ، ١) ثم أوجد النقطة الواقعة على المنحنى ويكون المماس عندها موازيًا للمستقيم : س + ٤ ص − ١ = ٠ «١٣٥°، $(\frac{٤}{٣}، \frac{٥}{٦})$ ، $(٠، \frac{١}{٢})$»

١٣ أوجد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها :

(١) ٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢} − ٢ س = ٤ عند النقطة (١ ، −١)

(٢) س^{٢} ص + س ص^{٢} = ٦ عند النقطة (١ ، ٢)

(٣) س^{٢} − ٣ س ص − ص^{٢} + ٣ = ٠ عند النقطة (−١ ، ٤)

(٤) (دورتان ٢٠٠٢) س^{٣} + س ص^{٢} − ٢ ص^{٢} = ٠ عند النقطة (١ ، ١)

(٥) (دورتان ٢٠٠٥) س^{٢} + ٢ $\sqrt{٢}$ س ص + ص^{٢} − ٢١ = ٠ عند النقطة (١ ، ٤)

(٦) ص = ظا س + جا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(٧) ص = $\frac{٦ \text{ ظا س}}{١ - \text{ ظا}^{٢} \text{ س}}$ عند س = $\frac{\pi}{٦}$

(٨) جا س = جتا ٣ ص عند النقطة $(٠، \frac{\pi}{٦})$

(٩) د (س) = ٢ ظا^{٣} س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

١٤ أوجد معادلة العمودى على كل من المنحنيات الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها :

(١) ص = س^{٢} − ٢ س + ٣ عند س = ١

(٢) (السودان ٢٠١٤) س ص = ٦ عند النقطة (٢ ، ٣)

(٣) (دورتان ٢٠٠١) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س = ٩ عند النقطة (٢ ، ١)

④ (دور ثان ٢٠١٢) $س^{٣} + ص^{٣} = ٦ س ص$ عند النقطة (٣ ، ٣)

⑤ $ص = ٤ + ظا س - ق(س)^{٢}$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

⑥ $ص = س |س|$ عند النقطة (-٢ ، -٤)

١٥ (دور أول ٢٠٠١) إذا كان ميل المماس للمنحنى : $ص^{٢} = س - ١$ يساوى $-\frac{١}{٢}$ فأوجد معادلة هذا المماس. «$ص = -\frac{١}{٢} س$»

١٦ إذا كانت النقطة (٤ ، -٢) تنتمى إلى المنحنى : $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ ل س + ١٢ = ٠$ **أوجد قيمة : ل** ، ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة. «٤ ، $ص + ٢ = ٠$»

١٧ إذا كانت $س \in [٠ ، \pi]$ **فأوجد نقطة على المنحنى :** $ص = ٢ جا س - جتا س$ يكون المماس عندها مائلاً بزاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأوجد معادلة هذا المماس. «$(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$ ، $٢ س + ٢ ص - \pi = ٠$»

١٨ (دور ثان ٢٠٠٠) **أوجد معادلة العمودى على المنحنى الذى معادلته :** $ص = \sqrt{٦ - س}$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $ص = س$ «$ص - ٤ س + ٦ = ٠$»

١٩ (دور أول ٢٠١٢) **أوجد بدلالة النسبة التقريبية π معادلة المماس للمنحنى :** $ص = جتا(س + ص)$ والذى ميله $= -\frac{١}{٢}$ حيث صفر $\leq س \leq \pi$ «$٢ س + ٤ ص - \pi = ٠$»

٢٠ أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه لكل من المنحنيات الآتية عن النقط المبينة أمام كل منها :

① $س^{٢} + ص^{٢} = ٥٢$ عند النقطة (٤ ، -٦)

② $س^{٢} - \sqrt{٣} س ص + ٢ ص^{٢} = ١٢$ عند النقطة $(\sqrt{٣} ، ٣)$

③ $س ص^{٢} = ١٨$ عند $ص = ٣$

④ (دور ثان ٢٠٠٣) $س^{٢} - ٢ س ص - ص^{٢} = ١$ عند النقطة (١ ، ٠)

⑤ $س^{٢} ص^{٢} - ٢ س - ٤ ص + ١ = ٠$ عند النقطة (-١ ، ١)

⑥ $ص^{٣} = س^{٢} - ٥ س - ٤$ عند $س = ١$

(٧) ص^{٢} (١ + س^{٢}) = ٨ عند النقطة (−١ ، ٢)

(٨) ص = س + ظا ٢ س عند س = ٠

(٩) ص = ٢ س − ظتا س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(١٠) ص = ٢ جتا س − قا س عند س = $\frac{\pi}{٣}$

(١١) ص = ٣ + قا س عند س = $\frac{\pi ٢}{٣}$

(١٢) ص = ٣ − ظتا^{٢} س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(١٣) (دور أول ٢٠١١) ص = س جتا ٢ س + جا س عند نقطة الأصل

(١٤) (دور ثان ٢٠١٥) ص = س^{٢} جا $\frac{\pi}{٢}$ س عند النقطة (٢ ، ٠)

(١٥) ص = $\sqrt{\text{جا س + جتا س}}$ عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(١٦) ص = ٨ جا^{٣} ٢ س عند س = $\frac{\pi}{١٢}$

(١٧) س جا ٢ ص = ص جتا ٢ س عند ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$)

(١٨) (جا س + جتا س) ص = جتا^{٢} س عند س = $\frac{\pi}{٢}$

٢١ أوجد معادلتى كل من المماس والعمودى عليه لكل من المنحنيات الآتية عند القيم المعطاه :

(١) س = ن^{٢} + ٤ ن ، ص = ٢ ن^{٢} عند ن = ١

(٢) س = ن^{٢} + ٣ ، ص = ن^{٣} − ٣ عند ن = ٢

(٣) س = ن^{٢} + ٢ ن + ٣ ، ص = ٢ ن^{٣} − ٦ ن + ١ عند ن = ٠

(٤) س = ن^{٢} − ٦ ن ، ص = ٨ $\sqrt{\text{ن − ٢}}$ عند ن = ٦

(٥) س = ن^{٣} − ٦ ، ص = $\sqrt[٣]{\text{٣ ن − ٥}}$ عند ن = ٢

(٦) س = جتا θ ، ص = $\sqrt{٢}$ + جا θ عند θ = $\frac{\pi}{٤}$

(٧) س = قا θ ، ص = ظا θ عند θ = $\frac{\pi}{٦}$

(٨) س = قتا θ ، ص = قتا θ + ظتا θ عند θ = $\frac{\pi}{٣}$

(٩) س = ٧ + ظتا θ ، ص = جا^{٢} θ + $\sqrt{٢}$ قا θ عند θ = $\frac{\pi}{٤}$

(١٠) س = قا^{٢} θ − ١ ، ص = ظا θ عند θ = $\frac{\pi -}{٤}$

٢٢ **أوجد معادلتى كل من المماس والعمودى عند النقطة :** (س ، ص) حيث س < ٠ ، ص <

والتى تقع على المنحنى : $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + ٤ س + ٦ ص + ٥ = ٠ والتى يصنع عنده المماس للمنحنى زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

«س – ص + ٣ = ٠ ، س + ص + ٥ = ٠

٢٣ **أوجد الصور المختلفة لمعادلة المماس والعمودى عليه للمنحنى :** ص = $س^{٢}$ + س عند نقـ

تقاطعه مع المستقيم ص – ٢ س = ٠ «س – ص = ٠ ، س + ٣ ص – ٧ = ٠

٢٤ **أكمل ما يأتى :**

(١) ميل المماس لمنحنى الدائرة : $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ١ عند س = $\frac{٣}{٥}$ يساوى

(٢) (دور أول ٢٠١٤) قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى : $ص^{٢}$ + ٢ $س^{٢}$ = ٦ عند النقطة (١ ، ٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ...

(٣) ميل العمودى لمنحنى الدالة ص = | $س^{٣}$ | عند النقطة (–٢ ، ٨) هو

(٤) النقط الواقعة على المنحنى : $س^{٢}$ – س ص + $ص^{٢}$ – ٣ = ٠ والتى يكون المماس عندها موازيًا للمستقيم : ص = – س هى

(٥) معادلة المماس للمنحنى : س = $ص^{٢}$ عند نقطة الأصل هى

(٦) معادلة المماس للمنحنى : ص = س | س | – ٣ س عند س = –١ هى

(٧) النقطة التى تقع على المنحنى ص = $س^{٤}$ وعندها المماس يوازى محور السينات هى

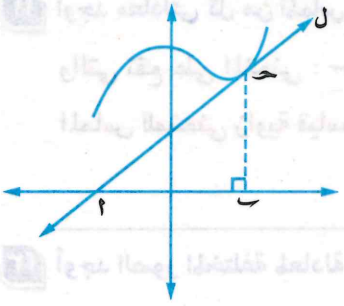
(٨) إذا كانت معادلة المماس للمنحنى ص = د (س) عند النقطة (٣ ، ٤) الواقعة على المنحنى هى س + ٣ ص = ١٥ فإن : د َ (٣) = ...

(٩) المماس للدالة ص = $\sqrt{س - ١}$ يكون رأسيًا عند النقطة الواقعة على المنحنى

(١٠) المماس للمنحنى : $س^{٢}$ – س ص + $ص^{٢}$ = ٢٧ المرسوم عند النقطة (٦ ، ٣) يصنع زاوية قياسها° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(١١) معدل تغير ميل المماس للدالة د (س) = ٢ $س^{٣}$ عند س = ٣ يساوى

(١٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان المستقيم ل مماسًا للدالة د عند النقطة

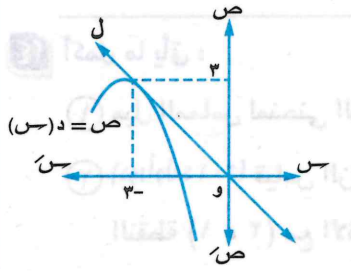
حـ يقطع محور السينات فى النقطة أ (-٤ ، ٠)

وكانت ب (٤ ، ٠)

وكان د (٤) + دَ (٤) = ٩

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... وحدة مربعة.

(١٣) فى الشكل المقابل :



إذا كان المستقيم ل يمس المنحنى

ص = د (س) عند (-٣ ، ٣)

وكان هـ (س) = $\frac{\text{د (٢ - س)}}{\text{س - ٢}}$

فإن : هـَ (٥) = ...

(٢٥) إذا كانت : د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س أوجد معادلتى المماس والعمودى لمنحنى الدالة ق فى كل مما يأتى مستعينًا بالقيم المعطاة فى الجدول التالى :

س	د (س)	ر (س)	دَ (س)	رَ (س)
٣	١	٧	-١	٦
٧	-٢	١	٢	٥

(١) ق (س) = د (س) × ر (س) ، س = ٣

(٢) ق (س) = د (س) ÷ ر (س) ، س = ٧

(٣) ق (س) = د [ر (س)] ، س = ٣

(٢٦) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان المستقيم : ص + س - ١ = ٠ يمس منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} - ٣ س + أ

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

② المماس لمنحنى الدالة ص = $\sqrt[3]{س}$ عند س = ٠ يوازى

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

(جـ) المستقيم ص = س (د) المستقيم س + ص = ٠

③ إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى ص = د (س) عند النقطة (١ ، ١) هى س + ٤ ص = ٥ فإن : د$'$ (١) = ...

(أ) −٣ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) −٤

④ المماس للمنحنى : ص = ٣ س^{٢} − ٥ عند النقطة (١ ، −٢) يمر بالنقطة

(أ) (٥ ، −٢) (ب) (٣ ، ١) (جـ) (٢ ، −٤) (د) (٠ ، −٨)

⑤ العمودى للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ١٢ عند أى نقطة عليها يمر بالنقطة

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (١ ، ١) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (−٢ ، −٢)

⑥ إذا كان المماس للمنحنى : ص^{٢} = ٤ أ س عمودى على محور السينات فإن :

(أ) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ (ب) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ١ (جـ) $\frac{ء س}{ء ص}$ = ١ (د) $\frac{ء س}{ء ص}$ = ٠

⑦ معادلة المماس للمنحنى س = ص^{٢} عند نقطة الأصل هى

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) س = ص (د) س + ص = ٠

⑧ إذا كان منحنيا الدالتين د (س) ، ر (س) متماسين عند النقطة (٢ ، ٤) وكانت : د$'$ (٢) = ٣ فإن : ر$'$ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

⑨ المماس للمنحنى الذى معادلتيه البارامتريتين : س = ٣ جتا θ ، ص = ٣ جا θ حيث (٠ ≤ θ ≤ π) يوازى محور السينات إذا كانت θ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

⑩ قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى ظا ٢ س = ظا ص مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة $\left(\frac{\pi ٣}{٤} ، \frac{\pi ٣}{٤}\right)$ تساوى

(أ) صفر (ب) ١٣٥° (جـ) ٤٥° (د) ٣٤ ٢٦°

(١١) المستقيم : أ س + ب ص + حـ = ٠ يكون عمودى على المنحنى س ص = ١ فإن

(أ) أ < ٠ ، ب < ٠ (ب) أ < ٠ ، ب > ٠

(جـ) أ = ٠ ، ب ≠ ٠ (د) أ > ٠ ، ب < ٠ أ، أ > ٠ ، ب > ٠

(١٢) إذا كان المماس للمنحنى : ص = س^{٣} - ٣ س^{٢} يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : س ∈

(أ)]٠ ، ٢[(ب)]٠ ، ٢[(جـ) ح -]٠ ، ٢[(د) ح -]٠ ، ٢[

(١٣) طول الجزء المقطوع من محور الصادات بواسطة مماس المنحنى ص = س جا س عندما س = π يساوى

(أ) - π (ب) π (جـ) - π^{٢} (د) π^{٢}

٢٧ (دور ثان ٢٠١٤) **أثبت أن المماس للمنحنى :** ص = س^{٣} + ٣ س - ٢ عند أى نقطة عليه يميل بزاوية حادة على محور السينات ثم أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (١ ، ٢) على المنحنى. «س + ٦ ص - ١٣ = ٠»

٢٨ إذا كان : ٢ ص = جا ٢ س **فأوجد :**

(١) قيم س من الفترة : ٠ ≤ س < π والتى عندها المماس يكون موازيًا لمحور السينات.

(٢) معادلة كل من المماس والعمودى عند هذه النقط.

٢٩ (دور أول ٢٠١٥) **إذا كان العمودى للمنحنى :** ص = ٤ - س^{٢} عند النقطة (١ ، ٣) يقطع المنحنى مرة أخرى عند حـ أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة حـ «١٢ س - ٤ ص + ٢٥ = ٠»

٣٠ (دور ثان ٢٠٠٩) **إذا كان المماس للمنحنى :** ص = س^{٤} - ٢ س^{٢} - س عند النقطة أ = (-١ ، ٠) يمس المنحنى عند نقطة أخرى ب فأوجد معادلة العمودى على المنحنى عند ب «س - ص - ٣ = ٠»

٣١ **أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه للمنحنى :**

ص^{٢} (٢ أ - س) = س^{٣} عند النقطة (أ ، أ) بالصورة المتجهة.

٣٢ (دور أول ٢٠٠٣) **أوجد النقط الواقعة على المنحنى :** ص = س^{٣} والتى يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة (٤ ، ٠)

«(٠ ، ٠) ، (٦ ، ٢١٦)»

٣٣ (دور أول ٢٠١٣) **إذا كان المماس للمنحنى :** ص = س^{٢} يمر بالنقطة (٣ ، ٥)

فأوجد معادلة هذا المماس.

«ص − ٢ س + ١ = ٠ ، ص − ١٠ س + ٢٥ = ٠»

٣٤ **إذا كان المماس للمنحنى :** س^{٢} − ص^{٢} = ١٦ يمر بالنقطة (٢ ، −٢)

فأوجد معادلة هذا المماس.

«٥ س − ٣ ص − ١٦ = ٠»

٣٥ **عين قيمة :** أ ∈ ح التى تجعل محور السينات مماسًا للمنحنى : ص = س^{٢} − ٢ أ س + أ − ١

ثم عين نقطة التماس.

«٢ ، (١ ، ٠)»

٣٦ **إذا كان المستقيم :** ١٣ س − ص − ٧ = ٠ يمس المنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} عند النقطة (١ ، ٦) **فما قيمة :** أ ، ب

«١ ، ٥»

٣٧ إذا كان المنحنى : ص = ٣ س^{٢} − ٧ س + ٤ يقطع محور السينات فى النقطتين أ ، ب أثبت أن المماسين عند أ ، ب متعامدان.

٣٨ (دور ثان ٢٠٠٦) **أوجد قيم :** أ ، ب ، حـ حتى يكون لمنحنيى الدالتين :

ص = أ س^{٣} + ب س ، ص = حـ س^{٢} − س مماسًا مشتركًا عند النقطة (−١ ، ٢)

وأوجد معادلة المماس المشترك.

«$-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، ٣ س + ص + ١ = ٠»

٣٩ **إذا قطع أى مستقيم أفقى المنحنى :** ص = س^{٢} فى نقطتين حـ ، ء أثبت أن المماسين المرسومين للمنحنى عند حـ ، ء يتقاطعان دائمًا عند محور الصادات.

٤٠ **أوجد قيم :** أ ، ب ، حـ الحقيقية حتى يكون المنحنيان ص = أ س^{٢} ، ص = ب − حـ س^{٢} متقاطعين على التعامد عند النقطة $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{٣}{٤}\right)$

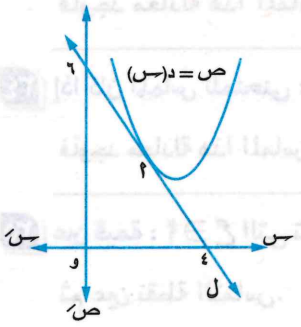
«١ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$»

٤١ إذا كانت (د) دالة حيث د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + أ & \text{عندما } س \geq ٣ \\ ب س & \text{عندما } س < ٣ \end{cases}$

وكان المماس للدالة (د) عند س = ٣ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها ٦

فما قيمة : أ ، ب «٩ ، ٦»

٤٢ في الشكل المقابل :



المستقيم ل يمس منحنى الدالة

ص = د (س) عند النقطة أ (٢ ، ٣)

وكان : د (س) = س^{٢} . د (٤ س − ٦)

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة

د عند س = ٢

٤٣ أوجد معادلتى المماسين للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} = ٥ والذى كل منهما يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها يساوى ٢ «ص = ٢ س + ٥ ، ص = ٢ س − ٥»

٤٤ (دور أول ٢٠١٤) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : س ص = ٨ اللذان يوازيان المستقيم : ص + ٢ س = ٩ «ص + ٢ س − ٨ = ٠ ، ص + ٢ س + ٨ = ٠»

٤٥ إذا كان للمنحنى : ص = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ س + ٥ مماسان متوازيان أحدهما يمس المنحنى عند النقطة (−١ ، ٢) أوجد معادلة المماس الآخر. «٤ س − ص + ٥ = ٠»

٤٦ (دور أول ٢٠٠٧) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : ص = س^{٣} − ٣ س + ٥ والعمودين على المستقيم : س + ٩ ص = ١ «ص − ٩ س + ١١ = ٠ ، ص − ٩ س − ٢١ = ٠»

٤٧ أوجد معادلتى المماسين لمنحنى الدالة : ص = س + $\frac{١}{س}$

اللذين يوازيان المستقيم $\overleftrightarrow{م ن}$ = (٥ ، ٠) + ك (١ ، −٣)

«٣ س + ص − ٤ = ٠ ، ٣ س + ص + ٤ = ٠»

٤٨ (دور أول ٢٠٠٩) أوجد معادلتى العمودين على المنحنى : س^{٢} + ص^{٢} − س + ٢ ص − ٢ = صفر عند نقطتى تقاطعه مع محور السينات. «٣ ص = ٢ س − ٤ ، ٣ ص = −٢ س − ٢»

٤٩ **أوجد معادلة المماس للمنحنى :** د (س) = س^{٢} عند نقط تقاطعه مع المنحنى ص = $\frac{١}{س}$

«٢ س – ص – ١ = ٠»

٥٠ (دور أول ٢٠٠٦) **إذا كان المماس للمنحنى :** س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠ يصنع مثلثًا متساوى الساقين مع محورى الإحداثيات فى الربع الأول فأوجد معادلة هذا المماس «ص + س – ١٠ = ٠»

٥١ أوجد النقطة الواقعة على محور الصادات بحيث يصنع المماسان المرسومان منها للمنحنى : ص + س^{٢} = ٠ والمستقيم المار بنقطتى التماس مثلث متساوى الأضلاع. «$(٠ ، \frac{٣}{٤})$»

٥٢ نقطة تتحرك على المنحنى : ص = س (س – ٥) أوجد موقع النقطة فى اللحظة التى يصنع فيها المماس والعمودى عليه مع محور السينات مثلث متساوى الساقين. «(٣ ، –٦) ، (٢ ، –٦)»

٥٣ **أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة :** ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + س + ١ والتى يصنع كل من المماس والعمودى على المماس عندها مع محور السينات مثلث متساوى الساقين.

«(٠ ، ١) ، (٣ ، $\frac{-١}{٢}$) ، (٢ ، $\frac{-١}{٣}$) ، (١ ، $\frac{٥}{٦}$)»

٥٤ **إذا كان المنحنى :** ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء يمر بالنقط (١ ، ٠) ، (٣ ، –٤) ، (٤ ، ٠) والمماس عند النقطة الأولى يوازى محور السينات.

فأوجد قيم : أ ، ب ، حـ ، ء «١ ، –٦ ، ٩ ، –٤»

٥٥ **إذا كان المنحنيان :** (س – أ)^{٢} + ص^{٢} = ١٨ ، (س + أ)^{٢} + ص^{٢} = ١٨ متقاطعين على التعامد. **فأوجد قيمة :** أ «± ٣»

٥٦ **أوجد معادلة العمودى للمنحنى :** ص = س^{٢} – ٣ س + ٥ عند كل من نقطتى تقاطعه مع الدائرة : س^{٢} – ٣ س + ص^{٢} = ٢٥ «س – ٣ ص + ١٥ = ٠ ، س + ٣ ص – ١٨ = ٠»

٥٧ **أثبت أن المماس لمنحنى الدالة :** ص = س^{٣} عند أى نقطة عليه يقطع المنحنى مرة أخرى فى نقطة يكون ميل المماس عندها أربعة أمثال ميله عند النقطة الأولى.

٥٨ أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور الصادات والمماس العمودى عليه للمنحنى :
٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠ عند النقطة (١ ، -٤)
«١ وحدة مربعة»

٥٩ أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى :
س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٢٠ عند النقطة (٢ ، ٢)
«٨,٥ وحدة مربعة»

٦٠ أوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودى عند النقطة (-١ ، ٢)
للمنحنى ٤ ص = ٩ - س^{٢}
«٥ وحدة مربعة»

٦١ (دور ثان ٢٠١٣) أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى : ص = $\frac{١}{س}$
حيث س > صفر عند أى نقطة عليه ومحورى الإحداثيات تساوى ٢ وحدة مربعة.

٦٢ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : س^{٢} + ٣ س ص + ص^{٢} + ١ = ٠
عند النقطة أ (-١ ، ١) ، وإذا قطعا محور السينات فى النقطتين ب ، حـ
احسب مساحة المثلث أ ب حـ بالوحدات المربعة.
«وحدة مربعة»

٦٣ أوجد مساحة المثلث المكون من محور السينات والمماسين للمنحنى :
س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س + ٤ ص - ٢٤ = ٠ عند نقطتى تقاطعه مع محور السينات.
«٦٢,٥ وحدة مربعة»

٦٤ أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور السينات والمماس والعمودى لمنحنى الدالة د (س) = س^{٢}
عند النقطة (٢ ، ٤) الواقعة عليه.
«٣٤ وحدة مربعة»

٦٥ أثبت أن المنحنيين : ص = س^{٢} + ٦ س + ٥ ، ص = س^{٣} - س^{٢} - س + ١ متماسان
عند النقطة (-١ ، ٠) وأوجد معادلة المماس المشترك لهما.
«٤ س - ص + ٤ = ٠»

٦٦ (دور أول ٢٠٠٨) أثبت أن المنحنيين : ص = س^{٢} - س ، ٢ ص = - س^{٣} - ٣ س
يتماسان ثم أوجد معادلة العمودى على المنحنيين عند نقطة التماس.
«س - ٣ ص + ٧ = ٠»

٦٧ أثبت أن المنحنيين : ص = ٣ س^{٢} - ٥ س - ٢ ، ص = س^{٢} - ٣ س - ٢
يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، -٤)

٦٨ أثبت أن المنحنيين : $(س - ١)^{٢} + ص^{٢} = ٢$ ، $(س + ١)^{٢} + ص^{٢} = ٢$ يتقاطعان على التعامد ، ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع.

٦٩ أثبت أن معادلة المماس للمنحنى : $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ عند النقطة $(س_{١} ، ص_{١})$ الواقعة عل
هى : $\frac{س\ س_{١}}{أ^{٢}} + \frac{ص\ ص_{١}}{ب^{٢}} = ١$

٧٠ أثبت أن المنحنى : $\left(\frac{س}{أ}\right)^{ن} + \left(\frac{ص}{ب}\right)^{ن} = ٢$ يمس المستقيم $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ٢$ ع
النقطة $(أ ، ب)$ مهما تكن قيمة $ن$

٧١ أثبت أن مجموع الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات بأى مماس للمنحنى : $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = \sqrt{أ}$ دائمًا مقدار ثابت.

٧٢ أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : $ص^{٢} = س^{٣}$ عند النقطتين الواقعتين عليه ويقعان على مستقيم يوازى المحور الصادى وعلى بعد منه يساوى وحدة طولية فى الاتجاه الموجب لمحور السينات. ثم استنتج معادلتى العمودين عليهما عند هاتين النقطتين.

للمتفوقين

٧٣ أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه للمنحنى : $ص^{٢} = ٤ س$ عند النقطة $أ (س_{١} ، ٢$ الواقعة عليه وإذا كان المماس والعمودى عليه للمنحنى عند $أ$ يقابلان المحور السينى فى $ب$ ، $حـ$ يقابلان المحور الصادى فى $ء$ ، $هـ$ فأوجد النسبة بين طولى $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ء هـ}$ ثم احسب مساحة الشكل الرباعى $ب حـ هـ ء$ «٢ : ١ ، ٥ وحدة مربع

٧٤ أوجد معادلة المماس المشترك للمنحنيين :

$ص = س^{٢} - ٦ س + ١٠$ ، $ص = ٤ س - س^{٢} - ٧$

«$٤ س + ص - ٩ = ٠$ ، $٢ س - ص - ٦ =$

الدرس 5

المعدلات الزمنية المرتبطة

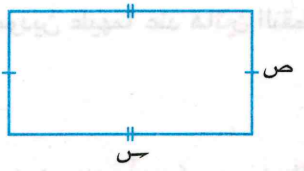
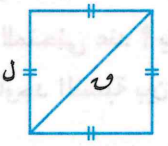
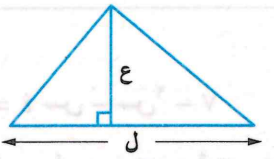
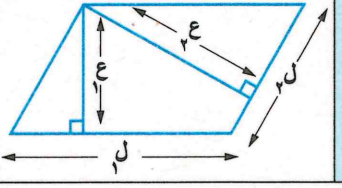
عندما تتعرض صفيحة دائرية لمصدر حرارى فإنها تتمدد أى يزداد طول نصف قطر دائرتها ، وكذلك تزداد مساحة سطحها تبعًا لذلك وهذه الزيادة سواء فى طول نصف القطر أو فى مساحة السطح تتغير بتغير زمن تعرض الصفيحة لهذا المصدر الحرارى.

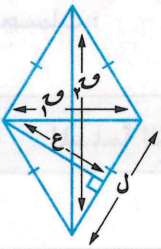
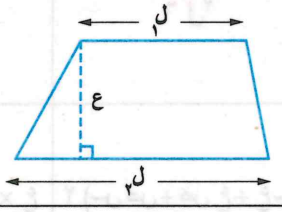
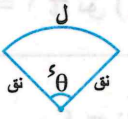
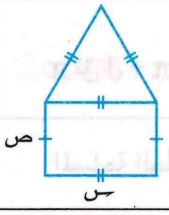
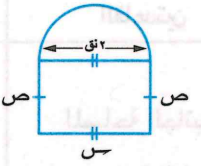
فإذا رمزنا لطول نصف قطر الصفيحة بالرمز (نق) ولمساحة سطحها بالرمز (م) فإن :

$\frac{د نق}{د ن}$ ، $\frac{د م}{د ن}$ (حيث ن الزمن) تسمى معدلات زمنية مرتبطة ومن العلاقة بين نق ، م نستطيع أن نوجد علاقة بين المعدلين الزمنيين $\frac{د نق}{د ن}$ ، $\frac{د م}{د ن}$ بحيث إذا علم أحد هذين المعدلين أمكن إيجاد المعدل الآخر.

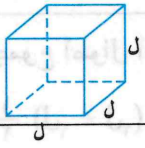
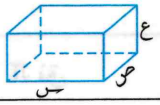
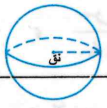
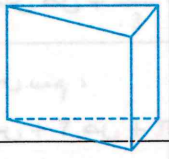
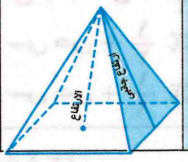
وعلى العموم إذا كانت لدينا علاقة بين عدة متغيرات س ، ص ، ع وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن ن فإننا نحصل على علاقة بين المعدلات الزمنية : $\frac{د س}{د ن}$ ، $\frac{د ص}{د ن}$ ، $\frac{د ع}{د ن}$

*** تذكر مساحات ومحيطات بعض الأشكال الهندسية :**

المستطيل		المحيط = ٢ (س + ص) المساحة = س × ص
المربع		المحيط = ٤ ل المساحة = $ل^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ $ق^{٢}$
المثلث		المحيط = مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ل × ع = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما
متوازى الأضلاع		المحيط = ٢ ($ل_{١}$ + $ل_{٢}$) المساحة = $ل_{١}$ × $ع_{١}$ = $ل_{٢}$ × $ع_{٢}$

المعين		المحيط = ٤ ل المساحة = ل × ع = $\frac{1}{2}$ ق١ × ق٢
شبه المنحرف		المحيط = مجموع أطوال أضلاعه الأربعة المساحة = $\frac{1}{2}$ (ل١ + ل٢) × ع
الدائرة		المحيط = ٢ π نق المساحة = π نق^{٢}
القطاع الدائرى		المحيط = ٢ نق + ل المساحة = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ θ° نق^{٢} حيث θ° = $\frac{ل}{نق}$ ، $\frac{س°}{١٨٠°} = \frac{θ°}{π}$
شباك على شكل مستطيل عليه مثلث متساوى الأضلاع		المحيط = ٣ س + ٢ ص المساحة = س ص + $\frac{1}{2}$ س^{٢} جا ٦٠° = س ص + $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^{٢}
شباك على شكل مستطيل عليه نصف دائرة		نق = $\frac{1}{2}$ س سم ، المحيط = س + ٢ ص + π نق = س + ٢ ص + $\frac{1}{2}$ π س المساحة = س ص + $\frac{1}{2}$ π نق^{٢} = س ص + $\frac{1}{8}$ π س^{٢}
المضلع المنتظم	حيث ن عدد الأضلاع ، س طول الضلع	المحيط = ن × س ، المساحة = $\frac{1}{4}$ ن س^{٢} ظا $\frac{π}{ن}$

* تذكر الحجوم والمساحات الكلية والجانبية لبعض المجسمات :

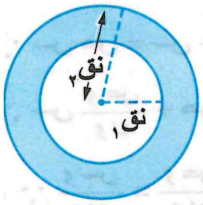
المجسم		المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
المكعب		٤ ل^{٢}	٦ ل^{٢}	ل^{٣}
متوازى المستطيلات		٢ (س + ص) × ع	٢ (س ص + ص ع + ع س)	س × ص × ع
الأسطوانة الدائرية القائمة		٢ π نق ع	٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢} = ٢ π نق (ع + نق)	π نق^{٢} ع
الكرة		———	٤ π نق^{٢}	$\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}
المخروط القائم		π نق ل	π نق ل + π نق^{٢}	$\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع
المنشور		محيط القاعدة × الارتفاع	المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين	مساحة القاعدة × الارتفاع
الهرم المنتظم		$\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	$\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

ملاحظـات

① إذا كان المتغير س
- يتزايد / يبتعد / يتمدد / يُصب / يتراكم
- يتناقص / يقترب / ينكمش / يتسرب / ينصهر

بتزايد الزمن فإن $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ يكون
- موجبًا
- سالبًا

② المسافة بين أى نقطتين $(س_1 ، ص_1) ، (س_2 ، ص_2)$
هى $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$



③ حجم الجزء المحصور بين كرتين متحدتى المركز طولا نصفى قطريهما $نق_1 ، نق_2$ يساوى $\frac{٤}{٣} \pi (نق_2^3 - نق_1^3)$

④ إذا كانت : $ل = س \times ص \times ع$ (ثلاث متغيرات)
فإن : $\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} \times ص ع + \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times س ع + \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} \times س ص$

مثـال ١

تتحرك نقطة على المنحنى : $س^2 + ص^2 - ٥ س + ٤ ص + ٩ = ٠$

فإذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة $(٢ ، -١)$ يساوى ٣

فأوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة.

الحـل

$\because س^2 + ص^2 - ٥ س + ٤ ص + ٩ = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن)

$\therefore ٢ س \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢ ص \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} - ٥ \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٤ \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

$\therefore (٢ س - ٥) \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + (٢ ص + ٤) \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

$\because \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٣$ عند النقطة $(٢ ، -١)$ ،

$\therefore (٤ - ٥) \times ٣ + (-٢ + ٤) \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

$\therefore -٣ + ٢ \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ١,٥$

مثال ٢

نقطة تتحرك على المنحنى : س ص = س + ص − ٥ أوجد موقع النقطة فى اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن يساوى معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن.

الحل

∵ س ص = س + ص − ٥ (بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن)

∴ س $\frac{ء ص}{ء ن}$ + ص $\frac{ء س}{ء ن}$ = $\frac{ء س}{ء ن}$ + $\frac{ء ص}{ء ن}$

∵ $\frac{ء س}{ء ن}$ = $\frac{ء ص}{ء ن}$ ، ∴ (س + ص) $\frac{ء ص}{ء ن}$ = ٢ $\frac{ء ص}{ء ن}$ وبالقسمة على ($\frac{ء ص}{ء س}$)

∴ س + ص = ٢ ∴ ص = ٢ − س

وبالتعويض فى معادلة المنحنى : ∴ س (٢ − س) = س + ٢ − س − ٥

∴ ٢ س − س^{٢} + ٣ = ٠ ∴ س^{٢} − ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠ ∴ س = ٣ ومنها ص = −١

أ، س = −١ ومنها ص = ٣ ∴ النقط هى : (٣ ، −١) ، (−١ ، ٣)

مثال ٣

يتسرب غاز من بالون كروى بمعدل ١٠ π سم^{٣} / ث

أوجد فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره = ١٠ سم

① معدل تغير طول نصف قطر البالون. ② معدل تغير مساحة سطح البالون.

الحل

نفرض أن طول نصف قطر البالون = نق سم

، مساحة سطح البالون = م سم^{٢} ، حجم البالون = ح سم^{٣}

① ∵ ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} ∴ $\frac{ء ح}{ء ن}$ = ٤ π نق^{٢} $\frac{ء نق}{ء ن}$

∴ −١٠ π = ٤ π × (١٠)^{٢} × $\frac{ء نق}{ء ن}$ ∴ $\frac{ء نق}{ء ن}$ = $\frac{-١}{٤٠}$ سم/ث

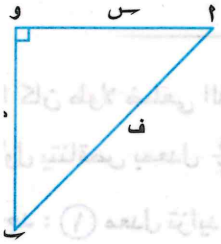
② ∵ م = ٤ π نق^{٢} ∴ $\frac{ع م}{ع ن} = ٨ \pi$ نق $\frac{ع نق}{ع ن}$

∴ $\frac{ع م}{ع ن} = ٨ \pi \times ١٠ \times \frac{-١}{٤٠} = -٢ \pi$ سم^{٢} / ث

مثال ٤

يسير قطار بادئًا حركته فى العاشرة صباحًا فى اتجاه الشرق بسرعة ٢٠ كم/س بينما بدأ قطار آخر حركته الساعة ١٢ ظهرًا من نفس النقطة متجهًا إلى الجنوب بسرعة ٣٠ كم/س ، أوجد معدل زيادة المسافة بينهما عند الساعة الثانية ظهرًا.

الحل



نفرض أن القطار الأول على بعد (س) كم من (و)

والقطار الثانى على بعد (ص) كم من (و) والمسافة

بين القطارين (ف) كم.

∵ ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}

∴ ٢ ف $\frac{ع ف}{ع ن} = ٢$ س $\frac{ع س}{ع ن} + ٢$ ص $\frac{ع ص}{ع ن}$ (١)

عند الساعة الثانية ظهرًا

∴ س = ٤ × ٢٠ = ٨٠ كم ، ص = ٢ × ٣٠ = ٦٠ كم

∴ ف = $\sqrt{(٨٠)^{٢} + (٦٠)^{٢}}$ = ١٠٠ كم

ومن المعادلة (١) : ∴ ٢ × ١٠٠ × $\frac{ع ف}{ع ن} = ٢ \times ٨٠ \times ٢٠ + ٢ \times ٦٠ \times ٣٠$

∴ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٣٤ كم/س

ملاحظة هامة

إذا كانت س$_{.}$ القيمة الابتدائية للمتغير س عند (ن = ٠)

، وكان معدل تغير س بالنسبة للزمن ثابت (أى أن : $\frac{ع س}{ع ن}$ = مقدار ثابت) ، س قيمة المتغير بعد زمن ن

فإن : س = س$_{.}$ + $\frac{ع س}{ع ن} \times$ ن

فمثلًا : ① إذا كان طول ساق معدنية = ١٦٠ سم تعرضت للتسخين فتمددت بمعدل ٢ سم/ث

فإن طول القضيب بعد $ن$ ثانية $ل = ل_{.} + \frac{ع ل}{ع ن} \times ن$

$\therefore ل = ١٦٠ + ٢ ن$

$ل_{.} = ١٦٠$ سم

$\frac{ع ل}{ع ن} = ٢$ سم/ث

② إذا انطلق صاروخ كتلته ١٧ طن وكان ينفث الوقود بمعدل ٢٠٠ كجم/ث

فإن كتلة الصاروخ بعد ٤٠ ثانية من لحظة انطلاقه

$ك = ك_{.} + \frac{ع ك}{ع ن} \times ن$

$ك_{.} = ١٧$ طن $= ١٧٠٠٠$ كجم

$\frac{ع ك}{ع ن} = -٢٠٠$ كجم/ث

$\therefore ك = ١٧٠٠٠ - ٢٠٠ \times ٤٠ = ٩٠٠٠$ كجم $= ٩$ طن

مثال ٥

إذا كان طولا ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما ٨ سم ، ٦ سم وكان طول الضلع الأول يتناقص بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/د وطول الضلع الثانى يتزايد بمعدل ١ سم/د

أوجد : ① معدل تزايد مساحة سطح المثلث بعد دقيقتين.

② الزمن الذى بعده تنعدم الزيادة.

الحل

∵ طول الضلع الأول يتناقص بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/د

$\therefore$ بعد $ن$ ثانية يصبح طوله $= \left(٨ - \frac{١}{٢} ن\right)$ سم

، طول الضلع الثانى يتزايد بمعدل ١ سم/د

$\therefore$ بعد $ن$ ثانية يصبح طوله $= (٦ + ن)$ سم

$\therefore$ مساحة المثلث $(م) = \frac{١}{٢} \times \left(٨ - \frac{١}{٢} ن\right) \times (٦ + ن) = \left(٤ - \frac{١}{٤} ن\right) \times (٦ + ن)$

$= ٢٤ + \frac{٥}{٢} ن - \frac{١}{٤} ن^{٢}$

$\therefore \frac{ع م}{ع ن} = \frac{٥}{٢} - \frac{١}{٢} ن$

$\therefore \left(\frac{ع م}{ع ن}\right)_{ن=٢} = \frac{٥}{٢} - \frac{١}{٢}(٢) = ١,٥$ سم^{٢}/د

وعندما $\frac{ع م}{ع ن} = ٠$

$\therefore \frac{٥}{٢} - \frac{١}{٢} ن = ٠$

$\therefore ن = ٥$ دقيقة.

تذكر أن :

$ل = ل_{.} + \frac{ع ل}{ع ن} \times ن$

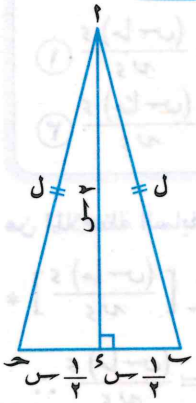
مثال ٦

صفيحة معدنية على شكل مثلث متساوى الساقين ارتفاعه يساوى ضعف طول قاعدته فإذا كان طول قاعدته يزداد بالتسخين بمعدل ٠,٠٤ سم/ثانية

فأوجد : ① معدل الزيادة فى مساحة سطح الصفيحة عندما يكون طول القاعدة ٨ سم

② معدل التغير فى طول كلٍ من الساقين.

الحل



نفرض أن طول قاعدة المثلث = س سم

∴ ارتفاعه = ٢ س سم

، مساحة المثلث = م سم^{٢} ، طول كل من الساقين = ل

① ∵ م = $\frac{١}{٢}$ س × ٢ س = س^{٢} (وبالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $\frac{ء م}{ء ن}$ = ٢ س $\frac{ء س}{ء ن}$

∴ $\left(\frac{ء م}{ء ن}\right)_{س = ٨}$ = ٢ × ٨ × ٠,٠٤ = ٠,٦٤ سم^{٢}/ثانية.

② ∵ ل^{٢} = (٢ س)^{٢} + $\left(\frac{١}{٢}س\right)^{٢}$ = ٤ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ س^{٢} = $\frac{١٧}{٤}$ س^{٢}

∴ ل = $\frac{\sqrt{١٧}}{٢}$ س (وبالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $\frac{ء ل}{ء ن}$ = $\frac{ء س}{ء ن}$ $\frac{\sqrt{١٧}}{٢}$ ∴ $\frac{ء ل}{ء ن}$ = ٠,٠٤ × $\frac{\sqrt{١٧}}{٢}$ = ٠,٠٢ $\sqrt{١٧}$ سم/ثانية.

مثال ٧

أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها = $\frac{٧}{٦}$ طول قطر قاعدتها. أوجد معدل تغير حجمها عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم إذا كان ارتفاعها يتغير بمعدل ٠,٠١ سم/ثانية.

الحل

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق سم وارتفاعها = ع سم

∴ ع = $\frac{٧}{٦}$ × ٢ نق = $\frac{٧}{٣}$ نق ∴ نق = $\frac{٣}{٧}$ ع

، ∵ ح = π نق^{٢} ع = π $\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}$ ع^{٢} × ع = $\frac{٩}{٤٩}$ π ع^{٣} (بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = $\frac{٢٧}{٤٩}$ π ع^{٢} × $\frac{د ع}{د ن}$ ، عندما نق = ٦ سم ∴ ع = ١٤ سم

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = $\frac{٢٧}{٤٩}$ × π × (١٤)^{٢} × ٠,٠١ = ١,٠٨ π سم^{٣}/ثانية.

ملاحظة

إذا كان س قياس زاوية بالتقدير الدائرى فإن :

① $\frac{د (جا س)}{د ن}$ = (جتا س) × $\frac{د س}{د ن}$ ② $\frac{د (ظا س)}{د ن}$ = (قا^{٢} س) × $\frac{د س}{د ن}$

③ $\frac{د (جتا س)}{د ن}$ = (− جا س) × $\frac{د س}{د ن}$

من الملاحظة السابقة نلاحظ أن :

* $\left[\frac{د (جا س)}{د ن}\right]_{س = ٠}$ = ١ × $\frac{د س}{د ن}$ ، $\left[\frac{د (ظا س)}{د ن}\right]_{س = ٠}$ = ١ × $\frac{د س}{د ن}$

∴ $\frac{د (جا س)}{د ن}$ = $\frac{د (ظا س)}{د ن}$ (عند س = ٠)

أى أن : يتزايد الجيب والظل بنفس المعدل عند س = ٠

* $\left[\frac{د (جا س)}{د ن}\right]_{س = \frac{\pi}{٣}}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{د س}{د ن}$ ، $\left[\frac{د (ظا س)}{د ن}\right]_{س = \frac{\pi}{٣}}$ = ٤ × $\frac{د س}{د ن}$

∴ $\frac{د (ظا س)}{د ن}$ = ٨ $\frac{د (جا س)}{د ن}$ $\left(\text{عند س} = \frac{\pi}{٣}\right)$

أى أن : يتزايد الظل بمعدل ٨ مرات قدر تزايد الجيب عند س = $\frac{\pi}{٣}$

$\left[\frac{د (جتا س)}{د ن}\right]_{س = \frac{\pi}{٦}}$ = − $\frac{١}{٢}$ × $\frac{د س}{د ن}$ ، $\left[\frac{د (ظا س)}{د ن}\right]_{س = \frac{\pi}{٦}}$ = $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{د س}{د ن}$

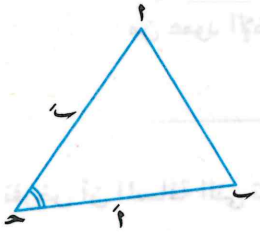
∴ $\frac{د (جتا س)}{د ن}$ = $\frac{-٣}{٨}$ $\frac{د (ظا س)}{د ن}$ $\left(\text{عند س} = \frac{\pi}{٦}\right)$

أى أن : يتناقص جيب التمام بمعدل $\frac{٣}{٨}$ مرة قدر تزايد الظل عند س = $\frac{\pi}{٦}$

مثال ٨

ضلعان فى مثلث يتزايد طول كل منهما بمعدل $\frac{١}{٣\sqrt{}}$ سم/ث ويتزايد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل $\frac{١}{٤}$ ء/ث أوجد معدل تغير مساحة المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل ضلع من أضلاع المثلث = ١٢ سم

الحل



نفرض أن مساحة المثلث = م ∴ م = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا ح

∴ $\frac{ء م}{ء ن} = \frac{١}{٢}$ أ ب × جا ح × $\frac{ء ح}{ء ن} + \frac{١}{٢}$ جا ح $\left(أ \frac{ء ب}{ء ن} + ب \frac{ء أ}{ء ن}\right)$

، ∵ $\frac{ء أ}{ء ن} = \frac{ء ب}{ء ن} = \frac{١}{٣\sqrt{}}$ ، $\frac{ء ح}{ء ن} = \frac{١}{٤}$

، عندما يكون طول كل ضلع من أضلاع المثلث = ١٢ سم يكون المثلث متساوى الأضلاع

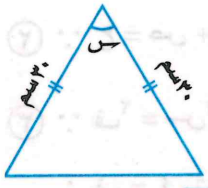
∴ ق (د ح) = $\frac{\pi}{٣}$

∴ $\frac{ء م}{ء ن} = \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٢ \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢} \times \left(٢ \times ١٢ \times \frac{١}{٣\sqrt{}}\right) \times \frac{٣\sqrt{}}{٢} = ١٥$ سم^{٢}/ث

مثال ٩

مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ٣٠ سم وقياس الزاوية بينهما = س فإذا تغيرت س بمعدل ٤ درجة لكل دقيقة أوجد معدل تغير مساحة المثلث عندما س = ٦٠°

الحل



∵ المساحة م = $\frac{١}{٢} \times ٣٠ \times ٣٠ \times$ جا س

∴ م = ٤٥٠ جا س (بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $\frac{ء م}{ء ن} = ٤٥٠$ جتا س × $\frac{ء س}{ء ن}$

، عندما س = ٦٠° ، $\frac{ء س}{ء ن} = \frac{\pi}{١٨٠°} \times ٤° = \frac{\pi}{٤٥}$ ء/دقيقة.

∴ $\frac{ء م}{ء ن} = ٤٥٠$ جتا ٦٠° × $\frac{\pi}{٤٥} = ٥ \pi$ سم^{٢}/دقيقة.

للحظ أن

الزاوية س لابد أن تكون بالتقدير الدائرى

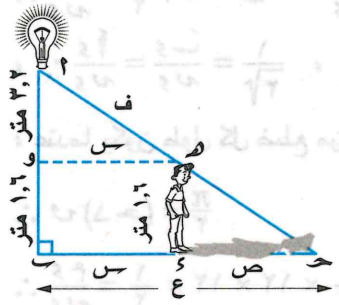
مثال ١٠

يسير رجل طوله ١,٦ متر بسرعة ٤ م/ث مبتعدًا عن عمود إضاءة معلق به مصباح يعلو ٤,٨ متر عن سطح الأرض.

أوجد : ① معدل تغير طول ظل الرجل. ② سرعة تحرك نهاية ظل الرجل.

③ معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح وذلك عندما يكون الرجل على بعد ٢,٤ متر من عمود الإضاءة.

الحل



نفرض أن المسافة التى تحركها الرجل = س

، طول ظل الرجل = ص

، المسافة التى تحركتها نهاية ظل الرجل = ع

، بعد رأس الرجل على المصباح = ف

① ∵ Δ أ ب حـ ~ Δ هـ ء حـ

$\therefore \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}} = \frac{٤,٨}{١,٦}$

$\therefore$ ٣ ص = س + ص

$\therefore$ ٢ ص = س

(بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن ن)

$\therefore$ ٢ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$

$\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} = \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$ م/ث

② ∵ ع = ص + س

$\therefore \frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} + \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}} = ٢ + ٤ = ٦$ م/ث

③ ∵ ف^{٢} = س^{٢} + (٣,٢)^{٢} ، عندما س = ٢,٤ متر

$\therefore$ ف = ٤ متر

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

$\therefore$ ٢ ف $\frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}} = ٢$ س $\frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$

$\therefore$ ٢ × ٤ × $\frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}} = ٢ \times ٢,٤ \times ٤$

$\therefore \frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}} = ٢,٤$ م/ث

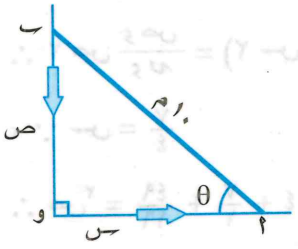
مثال ١١

سلم طوله ١٠ أمتار يستند طرفه السفلى على أرض أفقية وطرفه العلوى على حائط رأسى فإذا انزلق الطرف السفلى مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٢ م/ث عندما يكون الطرف السفلى على بعد ٨ أمتار من الحائط.

أوجد : ① معدل انزلاق الطرف العلوى.

② سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض.

الحل



نفرض أن الطرف السفلى للسلم على بعد س متر من الحائط ، الطرف العلوى للسلم على بعد ص متر من الأرض.

① ∵ $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$

، عند س = ٨ متر فإن ص = ٦ متر

$$\therefore ٨ \times ٢ + ٦ \times \frac{ع ص}{ع ن} = ٠ \qquad ، ٢ س \frac{ع س}{ع ن} + ٢ ص \frac{ع ص}{ع ن} = ٠$$

$$\therefore س \frac{ع س}{ع ن} + ص \frac{ع ص}{ع ن} = ٠$$

$$\therefore \frac{ع ص}{ع ن} = \frac{-٨}{٣} \text{ م/ث}$$

② ∵ $جا\theta = \frac{ص}{١٠}$

$$\therefore جا\theta \frac{ع \theta}{ع ن} = \frac{١}{١٠} \frac{ع ص}{ع ن}$$

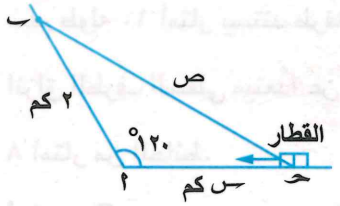
$$\therefore \frac{٨}{١٠} \times \frac{ع \theta}{ع ن} = \frac{١}{١٠} \times \frac{-٨}{٣}$$

$$\therefore \frac{ع \theta}{ع ن} = \frac{-١}{٣} \text{ ع/ث}$$

مثال ١٢

خطان حديديان متلاقيان فى زاوية قياسها ١٢٠° يسير قطار على أحدهما بسرعة ٦٥ كم/ساعة نحو نقطة التقاطع أ أوجد معدل اقتراب القطار من المحطة ب التى تقع على الخط الحديدى الآخر وعلى بعد من أ قدره ٢ كم وذلك فى اللحظة التى يكون فيها القطار على بعد من أ قدره $١\frac{٣}{٤}$ كم.

الحل



نفرض أن بعد القطار عن أ فى لحظة ما = س كم

وأن بعده عن المحطة ب فى هذه اللحظة = ص كم

∵ القطار يقترب من أ بسرعة ٦٥ كم/ساعة

∴ $\frac{د س}{د ن} = -٦٥$ كم/ساعة

من Δ أ ب حـ : ∵ ص^{٢} = س^{٢} + (٢)^{٢} − ٢ × س × ٢ جتا ١٢٠°

∴ ص^{٢} = س^{٢} + ٢ س + ٤ (وبالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ ٢ ص $\frac{د ص}{د ن}$ = (٢ س + ٢) $\frac{د س}{د ن}$ ∴ ص $\frac{د ص}{د ن}$ = (س + ١) $\frac{د س}{د ن}$ (١)

∵ س = $\frac{٧}{٤}$ ،

∴ ص^{٢} = $\frac{٤٩}{١٦}$ + $\frac{٧}{٢}$ + ٤ = $\frac{١٦٩}{١٦}$ ∴ ص = $\frac{١٣}{٤}$ = ٣ $\frac{١}{٤}$ كم

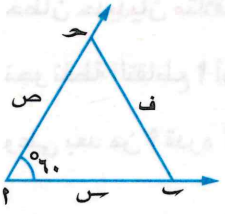
وبالتعويض فى (١) : ∴ $\frac{١٣}{٤}$ × $\frac{د ص}{د ن}$ = $\left(\frac{٧}{٤} + ١\right)$ × −٦٥ ∴ $\frac{د ص}{د ن}$ = −٥٥

أى أن معدل اقتراب القطار من المحطة ب عند اللحظة المذكورة = ٥٥ كم/ساعة

مثال ١٣

$\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ طريقان متلاقيان يحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° تحركت سيارة على الطريق $\overleftarrow{أ ب}$ من نقطة أ بسرعة ٤٠ كم/ساعة وبعد ١٠ دقائق تحركت سيارة أخرى على الطريق $\overleftarrow{أ حـ}$ من نقطة أ بسرعة ٦٠ كم/ساعة. أوجد معدل تباعدهما بعد مضى ٢٠ دقيقة من تحرك السيارة الثانية.

الحل



نفرض أن السيارة الأولى قطعت مسافة س ∴ $\frac{د س}{د ن}$ = ٤٠ كم/س

والسيارة الثانية قطعت مسافة ص ∴ $\frac{د ص}{د ن}$ = ٦٠ كم/س

، ∵ ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س ص جتا ٦٠°

∴ ف^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} − س ص (١) (بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ ٢ ف $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٢ س $\frac{ع س}{ع ن}$ + ٢ ص $\frac{ع ص}{ع ن}$ − [س $\frac{ع ص}{ع ن}$ + ص × $\frac{ع س}{ع ن}$] (٢)

وبعد مضى ٢٠ دقيقة من حركة السيارة الثانية أى : ن = $\frac{٢٠}{٦٠}$ = $\frac{١}{٣}$ ساعة

∴ ص = ٦٠ × $\frac{١}{٣}$ = ٢٠ كم

نجد أن السيارة الأولى تحركت (١٠ + ٢٠ = ٣٠ دقيقة) أى : ن = $\frac{٣٠}{٦٠}$ = $\frac{١}{٢}$ ساعة

∴ س = ٤٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٢٠ كم

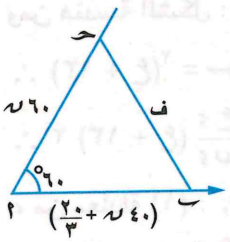
ومن (١) نجد أن : ف = $\sqrt{(٢٠)^{٢} + (٢٠)^{٢} - ٢٠ \times ٢٠}$ = ٢٠ كم

وبالتعويض فى (٢) :

∴ ٢ × ٢٠ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٢ × ٢٠ × ٤٠ + ٢ × ٢٠ × ٦٠ − [٢٠ × ٦٠ + ٢٠ × ٤٠]

∴ $\frac{ع ف}{ع ن}$ = ٥٠ كم/س

حل آخر :



∵ المسافة التى تحركتها السيارة الأولى قبل

تحرك السيارة الثانية = ٤٠ × $\frac{١٠}{٦٠}$ = $\frac{٢٠}{٣}$ كم

ونفرض أن السيارتين تحركت معًا زمن = ن ساعة

فإن المسافة التى قطعتها السيارة الأولى = ٤٠ ن + $\frac{٢٠}{٣}$

، المسافة التى قطعتها السيارة الثانية = ٦٠ ن

∴ ف^{٢} = (٤٠ ن + $\frac{٢٠}{٣}$)^{٢} + (٦٠ ن)^{٢} − ٢ (٤٠ ن + $\frac{٢٠}{٣}$) (٦٠ ن) × $\frac{١}{٢}$ (١)

، عندما ن = ٢٠ دقيقة = $\frac{٢٠}{٦٠}$ = $\frac{١}{٣}$ ساعة ∴ ف = ٢٠ كم

وباشتقاق العلاقة (١) بالنسبة للزمن (ن)

$$\therefore ٢ف \frac{ع ف}{ع ن} = ٢(٤٠ن + \frac{٢٠}{٣}) \times ٤٠ + ٢(٦٠ن) \times ٦٠$$
$$- [(٤٠ن + \frac{٢٠}{٣})(٦٠) + (٦٠ن) \times (٤٠)]$$

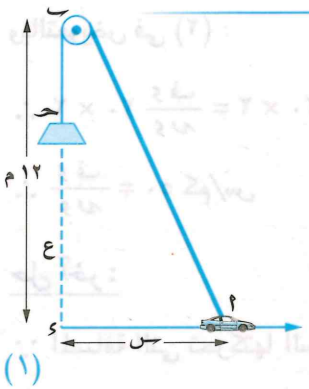
$$\therefore ٢ف \frac{ع ف}{ع ن} = ٥٦٠٠ن + \frac{٤٠٠}{٣} \qquad \therefore ٢ \times ٢٠ \frac{ع ف}{ع ن} = ٥٦٠٠ \times \frac{١}{٣} + \frac{٤٠٠}{٣}$$

$$\therefore \frac{ع ف}{ع ن} = ٥٠ \text{ كم/س}$$

مثال ١٤

حبل طوله ٢٥ متر يمر حول بكرة ترتفع عن الأرض ١٢ متر مربوط بطرفه ثقل والطرف الآخر مربوط فى سيارة تسير على الأرض بسرعة ٦ م/ث ، أوجد معدل ارتفاع الثقل فى اللحظة التى تبعد فيها السيارة مسافة ١٦ متر عن مسقط البكرة على سطح الأرض.

الحل



(١)

نفرض أن ارتفاع الثقل = ع وبعد السيارة

عن مسقط البكرة = س

$$\therefore ب حـ = ١٢ - ع$$

$$، أ ب = ٢٥ - (١٢ - ع) = ١٣ + ع$$

ومن هندسة الشكل :

$$\therefore (١٣ + ع)^{٢} = س^{٢} + (١٢)^{٢}$$

$$\therefore ٢(١٣ + ع) \frac{ع ع}{ع ن} = ٢ س \frac{ع س}{ع ن} ، \text{ عندما } س = ١٦ \text{ مترًا}$$

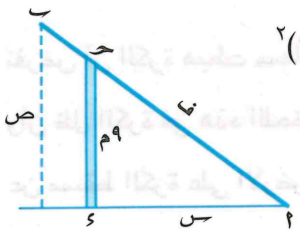
$$، \text{ من معادلة (١) : } \therefore (١٣ + ع)^{٢} = ٤٠٠ \qquad \therefore ع = ٧ \text{ مترًا}$$

$$\therefore ٢(١٣ + ٧) \frac{ع ع}{ع ن} = ٢ \times ١٦ \times ٦ \qquad \therefore \frac{ع ع}{ع ن} = ٤,٨ \text{ م/ث}$$

مثال ١٥

يستند قضيب $\overline{أ ب}$ طوله ١٥ متر بطرفه أ على أرض أفقية وبإحدى نقطة حـ على حائط رأسى ارتفاعه ٩ متر. إذا انزلق الطرف أ مبتعدًا عن الحائط بمعدل $\frac{١}{٢}$ م/دقيقة فأوجد معدل هبوط الطرف ب عندما يصل إلى حافة الحائط.

الحـل



نفرض أن أ حـ = ف ، أ ء = س

∴ ف^{٢} = س^{٢} + (٩)^{٢}

∴ ٢ ف $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ٢ س $\frac{ء س}{ء ن}$

، عندما يصل طرف القضيب إلى حافة الحائط

∴ ف = ١٥ م ، س = ١٢ م

∴ ٢ × ١٥ × $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ٢ × ١٢ × $\frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ٠,٤ م/د

ومن هندسة الشكل نجد أن : $\frac{ف}{١٥}$ = $\frac{٩}{ص}$ ∴ ف ص = ١٣٥

∴ ف $\frac{ء ص}{ء ن}$ + ص $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ٠ ∴ ١٥ $\frac{ء ص}{ء ن}$ + ٩ × ٠,٤ = ٠

∴ $\frac{ء ص}{ء ن}$ = −٠,٢٤ م/د

مثـال ١٦

فى دائرة كهربائية مغلقة إذا كان حـ فرق الجهد (فولت) ، ت شدة التيار (أمبير) ، م المقاومة (أوم) وإذا تزايد فرق الجهد بمعدل ٢ فولت/ث وتناقصت شدة التيار بمعدل $\frac{١}{٢}$ أمبير/ث أوجد معدل تغير المقاومة فى اللحظة التى يكون فيها حـ = ٢٤ فولت ، ت = ٤ أمبير علمًا بأن [حـ = ت × م]

الحـل

∵ حـ = ت × م (باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن) ∴ $\frac{ء حـ}{ء ن}$ = ت × $\frac{ء م}{ء ن}$ + م $\frac{ء ت}{ء ن}$

، ∵ $\frac{ء حـ}{ء ن}$ = ٢ فولت/ث ، $\frac{ء ت}{ء ن}$ = $\frac{-١}{٢}$ أمبير/ث

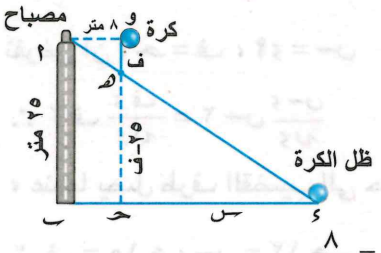
، حـ = ٢٤ فولت ، ت = ٤ أمبير ∴ م = $\frac{حـ}{ت}$ = $\frac{٢٤}{٤}$ = ٦ أوم

∴ ٢ = ٤ × $\frac{ء م}{ء ن}$ + ٦ × $\frac{-١}{٢}$ ∴ $\frac{ء م}{ء ن}$ = $\frac{٥}{٤}$ أوم/ث

مثـال ١٧

مصباح مضيء مثبت فى قمة برج ارتفاعه ٢٥ متر إذا سقطت كرة من نفس الارتفاع من نقطة تبعد ٨ متر عن المصباح أوجد سرعة تحرك ظل الكرة على الأرض عندما تكون الكرة على ارتفاع ١٥ متر عن سطح الأرض.

الحـل



نفرض أن الكرة هبطت مسافة (ف) بعد مرور (ن) ثانية

وأن ظل الكرة فى هذه اللحظة يبعد مسافة (س)

عن مسقط الكرة على الأرض (حـ)

∵ Δ أ و هـ ~ Δ ء حـ هـ ∴ $\frac{٨}{س} = \frac{ف}{٢٥ - ف}$

∴ س = $\frac{٢٠٠ - ٨ ف}{ف} = \frac{٢٠٠}{ف} - ٨$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى ن)

∴ $\frac{ء س}{ء ن} = \frac{-٢٠٠}{ف^{٢}} \times \frac{ء ف}{ء ن}$ (١)

عند اللحظة التى تكون الكرة فيها على ارتفاع ١٥ متر تكون ف = ١٠ متر

∵ ع^{٢} = ع$_{ب}^{٢}$ + ٢ ء ف ∴ ع^{٢} = صفر + ٢ × ٩,٨ × ١٠ = ١٩٦

∴ ع = ١٤ م/ث ∴ $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ١٤ م/ث

وبالتعويض فى (١) : ∴ $\frac{ء س}{ء ن} = \frac{-٢٠٠}{(١٠)^{٢}} \times ١٤ = -٢٨$ م/ث

أى أن ظل الكرة يتحرك مقتربًا من مسقط الكرة على الأرض بسرعة ٢٨ م/ث

تمارين

5

على المعدلات الزمنية المرتبطة

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أكمل ما يأتى :

(١) مستطيل طوله ضعف عرضه فإذا كان معدل تغير الطول هو ٦ سم/ث فإن معدل تغير العرض = ... سم/ث.

(٢) إذا زاد طول ضلع مثلث متساوى الأضلاع بمعدل ٢ سم/ث فإن محيط المثلث يزداد بمعدل

(٣) مربع طول ضلعه ٥ سم بدأ طول الضلع فى التزايد بمعدل ٢ سم/ث فإن طول ضلع المربع بعد زمن ن ثانية يعطى بالعلاقة

(٤) إذا كان : ص = س^{٢} − ٣ س فإن : $\frac{د ص}{د ن} = \frac{د س}{د ن}$ عند س = ...

(٥) إذا تحرك جسيم على المنحنى : ص^{٢} + س^{٢} = ١٠ بحيث كان $\frac{د ص}{د ن} = ٤$

فإن : $\frac{د س}{د ن}$ = ... عند النقطة $(\sqrt{٥}\ ،\ -\sqrt{٥})$

٢ تتحرك نقطة على المنحنى : س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٨ ص − ٦ = ٠ وكان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن ن عند النقطة (٣ ، ١) يساوى ٤ وحدات/ث ، أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة. « $\frac{-٤}{٥}$ »

٣ تتحرك نقطة على المنحنى : س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٧ وكان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (−١ ، ٣) يساوى ٠,١ أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة. « $\frac{-١}{٥٠}$ »

٤ (دور أول ٢٠١١) تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى الذى معادلته : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ٤ ص = ٢٧ عين موضع هذه النقطة فى اللحظة التى يكون عندها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مساويًا لمعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن. «(−٥ ، ٦) ، (٣ ، −٢)»

٥ (دور ثان ٢٠٠٨) تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى : س^{٢} + ٤ س − ص = ٣ عين موضع النقطة عند اللحظة التى تكون فيها سرعة إحداثيها الصادى ضعف سرعة إحداثيها السينى.

«(−١ ، −٦)»

٦ (دور ثان ٢٠٠١) تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى : ص = س^{٢} − $\frac{١}{٤}$ فأوجد موضع هذه النقطة عند اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن يساوى ثلاثة أمثال معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن. «$\left(٢ ، \frac{٣}{٢}\right)$»

٧ أكمل ما يأتى :

(١) صفيحة مربعة الشكل تتمدد بانتظام فإذا كان معدل ازدياد مساحة سطح الصفيحة ٧٥ سم^{٢}/ث فإن معدل زيادة طول ضلع الصفيحة = ... عندما يكون طول ضلعها ٥ سم.

(٢) صفيحة معدنية مربعة الشكل يتغير طول ضلعها بمعدل ٠,٢ سم/ثانية. فإن : معدل التغير فى مساحة سطحها = ... عندما يكون طول قطرها ٨ $\sqrt{٢}$ سم.

(٣) سقط حجر فى ماء ساكن فتكونت موجة دائرية فإذا عُلم أن طول نصف قطر الموجة يزداد بمعدل ٣ سم/ث فإن معدل زيادة مساحة الموجة بعد مرور ٤ ثوان يساوى سم^{٢}/ثانية.

(٤) تزداد مساحة قرص دائرى بمعدل ٠,٢ سم^{٢}/ث فإن معدل الزيادة فى طول نصف قطره = ... عندما يكون طول نصف القطر ٧ سم. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(٥) قرص معدنى ينقص طول قطره بالتبريد بمعدل ٠,٥ سم/ثانية. فإن معدل النقص فى مساحة سطحه = ... عندما يكون طول نصف قطره ١٤ سم.

(٦) خزان ماء مكعب الشكل طول ضلعه ٤ متر يصب فيه الماء بمعدل $\frac{١}{٢}$ م^{٣}/دقيقة فإن معدل تغير ارتفاع الماء فى الخزان = ... م/دقيقة.

(٧) تتحرك نقطة على المنحنى : ص = س − $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$ فإذا كان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند س = $\sqrt{٢}$ يساوى ٩ فإن معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة = ...

(٨) ينصهر مكعب من الثلج محتفظًا بشكله بمعدل ١ سم^{٣}/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم^{٣} هو سم/ث.

(٩) اسطوانة دائرية قائمة تتمدد بحيث تظل محتفظة بشكلها ، فإذا كان طول نصف قطرها (نق) يزداد بمعدل ٠,٥ سم/ث وارتفاعها (ع) يزداد بمعدل ٠,٢٥ سم/ث فإن معدل التغير فى حجم الأسطوانة عندما يكون نق = ٣ سم ، ع = ٥ سم يساوى سم^{٣}/ث.

٨ (دورثان ٢٠٠٤) صفيحة معدنية على شكل مثلث متساوى الأضلاع تتمدد وتحتفظ بشكلها الهندسى فإذا كان معدل الزيادة فى طول ضلعها ٠,١ سم/ث فأوجد طول ضلع الصفيحة فى اللحظة التى يكون معدل الزيادة فى مساحتها مساويًا $٣\sqrt{٣}$ سم^{٢}/ث «٢٠ سم»

٩ مستطيل طوله ضعف عرضه يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله وبنفس النسبة بين أبعاده أوجد مساحة المستطيل فى اللحظة التى يزداد فيها الطول بمعدل ٠,٠١ سم/ث وتزداد المساحة بمعدل ٠,٢ سم^{٢}/ث. «٢٠٠ سم^{٢}»

١٠ قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٠ سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٢٠ سم ، فإذا كان الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم/ث عندما يكون العرض ٨٠ سم ، احسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة. «-٤,٥ سم^{٢}/ث»

١١ (دورثان ٢٠٠٣) إذا كانت ح هى مساحة المنطقة المحصورة بين دائرتين متحدتى المركز طولا نصفى قطريهما نق$_{١}$ ، نق$_{٢}$ حيث نق$_{٢}$ > نق$_{١}$ وكان نق$_{١}$ يتزايد بمعدل ٠,٤ سم/ث ، نق$_{٢}$ يتناقص بمعدل ٠,٢ سم/ث فأوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن عند اللحظة التى يكون عندها نق$_{١}$ = ٨ سم ، نق$_{٢}$ = ١٤ سم «-١٢ π سم^{٢}/ث»

١٢ (دورثان ٢٠٠٩) سقط حجر فى ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٢,١ سم/ث. فإذا كان معدل الزيادة فى مساحة سطح الموجة فى نهاية ن ثانية من البداية يساوى ٢٧٧,٢ سم^{٢}/ث فأوجد قيمة ن. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «١٠ ثانية»

١٣ (دورثان ٢٠١٠) مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين مساحته (م) سم^{٢}

فإذا كان : $\frac{د م}{د ن} = ٣٢$ سم^{٢}/ث فى اللحظة التى كان طول أى من الساقين ٨ سم.

أوجد عند هذه اللحظة معدل التغير الزمنى لمحيط المثلث (ح) «$٨ + ٤\sqrt{٢}$ سم/ث»

١٤ مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠٢ سم/د وتزداد مساحة سطحه في لحظة ما بمعدل ٠,٧٢ سم^{٢}/د أوجد طول حرف المكعب في هذه اللحظة ومعدل الزيادة في حجمه حينئذ. «٣ سم ، ٠,٥٤ سم^{٣}/د»

١٥ مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠١ سم/دقيقة فإذا كان معدل تغير حجمه عند لحظة ما ٧٥ سم^{٣}/دقيقة.

فأوجد : (١) طول ضلع المكعب عند هذه اللحظة.

(٢) معدل تغير المساحة الكلية للمكعب عند هذه اللحظة. «٥٠ سم ، ٦ سم^{٢}/د»

١٦ تحركت سفينتان من نقطة واحدة وفي لحظة واحدة الأولى في اتجاه الشرق بسرعة ٦٠ كم/ساعة والثانية في اتجاه الجنوب بسرعة ٨٠ كم/ساعة أوجد معدل التغير بين السفينتين بعد ساعتين من بدء الحركة. «١٠٠ كم/ساعة»

١٧ يمر حبل فوق بكرة صغيرة ملساء عند قمة برج على ارتفاع ١٢ متر ويمسك بأحد طرفي الحبل عامل عند قاعدة البرج ، وثبت الطرف الآخر للحبل في عربة ثقيلة على الأرض. فإذا استطاع العامل جذب الحبل بمعدل ٢ متر/دقيقة فاحسب السرعة التي تتحرك بها العربة نحو البرج عندما تكون العربة على بُعد ٩ أمتار من قاعدته. «$\frac{١٠}{٣}$ م/د»

١٨ يقف رجل على بُعد ٥٠ مترًا من طائرة مروحية تقف في المطار ، فإذا صعدت الطائرة رأسيًا إلى أعلى بمعدل ٦٥ متر/ثانية. فأوجد المعدل الذي تبعد به الطائرة عن الرجل عندما تكون الطائرة على ارتفاع ١٢٠ مترًا من سطح الأرض. «٦٠ متر/ثانية»

١٩ يرتفع بالون رأسيًا لأعلى بسرعة ثابتة مقدارها ١٥ م/ث وعندما كان البالون على ارتفاع ٩٠ مترًا مرت تحته مباشرة سيارة وواصلت سيرها في خط مستقيم بسرعة ثابتة مقدارها ٢٥ م/ث. أوجد المعدل الذي تزداد به المسافة بين السيارة والبالون بعد ثانيتين من مرور السيارة تحت البالون. «$\frac{٣٠٥}{١٣}$ م/ث»

٢٠ يرتفع بالون رأسيًا لأعلى من نقطة أ على سطح الأرض. وضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة ب فى نفس المستوى الأفقى للنقطة أ وعلى بعد ٢٠٠ متر منها عند لحظة ما رصد الجهاز زاوية ارتفاع البالون فوجدها $\frac{\pi}{٤}$ وتتزايد بمعدل ٠,١٢ °/د ، أوجد معدل ارتفاع البالون فى هذه اللحظة. «٤٨ م/د»

٢١ ترتفع طائرة عمودية رأسيًا لأعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢ م/د فإذا تم رصد الطائرة من مشاهد على الأرض ويبعد ١٥٠م عن موقع إقلاعها ، فأوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة عندما تكون على ارتفاع ١٥٠م من سطح الأرض. «$\frac{٧}{٥٠}$ °/د»

٢٢ (دور أول ٢٠٠٤) حبل من الصلب على شكل أسطوانة دائرية قائمة يتمدد بالتسخين بحيث يزداد طوله بمعدل ٠,٠٠٥ سم/دقيقة ، ويزداد طول قطر مقطعه الدائرى بمعدل ٠,٠٠٢ سم/دقيقة. أوجد بدلالة π معدل تغير حجم الحبل بالنسبة للزمن عندما يكون طوله ٤٠ سم وطول قطر مقطعه ٢ سم. «٠,٠٨٥ π سم^{٣}/ د»

٢٣ (دور أول ٢٠٠٦) وعاء أسطوانى الشكل طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ٦٠ سم ، فإذا كان الوعاء فارغًا وصب فيه الماء بمعدل ٣٠ π سم^{٣}/ث. أوجد معدل ارتفاع الماء فى الوعاء. متى يمتلئ الوعاء بالماء ؟ «٠,٣ سم/ث ، ٢٠٠ ثانية»

٢٤ خزان بترول على شكل أسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢٤ مترًا. يُراد تفريغ الخزان من البترول بمعدل ٢ م^{٣}/د ، فما معدل تغير ارتفاع البترول فى الخزان ؟ «$\frac{-١}{\pi ٧٢}$ م/د»

٢٥ أسطوانة ارتفاعها يساوى طول قطر قاعدتها ، فإذا تمددت بحيث كان معدل ازدياد مساحتها السطحية الكلية بالنسبة للزمن يساوى ١٨ π سم^{٢}/ث عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها يساوى ٦ سم فاحسب معدل ازدياد طول نصف القطر. «$\frac{١}{٤}$ سم/ث»

٢٦ سلم طوله ٢,٦ متر يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية. إذا كان طرفه السفلى يتحرك مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٤ متر/د عندما يكون على بعد ١ متر من الحائط. أوجد معدل تحرك طرفه العلوى ومعدل تغير قياس زاوية ميل السلم على الأرض حينئذ.

« $\frac{-٥}{٣}$ م/د ، $\left(\frac{-٥}{٣}\right)^{٦}$ /د»

٢٧ يستند سلم طوله ٦,٥ متر بأحد طرفيه على أرض أفقية وبطرفه الآخر على حائط رأسى. فإذا انزلق الطرف السفلى للسلم مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٣٠ سم/دقيقة عندما يكون على بعد ٢,٥ متر من الحائط. أوجد عندئذ معدل انخفاض الطرف العلوى للسلم.
ثم أوجد بعد الطرف العلوى للسلم عن الأرض عندما يتحرك الطرف العلوى والطرف السفلى بنفس المعدل.

« $\frac{١}{٨}$ م/د ، $\frac{\sqrt{١٣}\times\sqrt{٢}}{٤}$ م»

٢٨ سلم ثابت الطول ينزلق طرفه العلوى على حائط رأسى بمعدل $ل$ وحدة/ث ، أوجد معدل ابتعاد طرفه السفلى عن الحائط عندما يميل السلم على الرأسى بزاوية θ
حيث ظا $\theta = \frac{٥}{٤}$

« $\frac{٣ل}{٤}$ وحدة/ث»

٢٩ سلم طوله ٤ أمتار يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى وبطرفه الآخر على أرض أفقية ، فإذا انزلق الطرف الملامس للأرض مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٢٠ سم/ث. احسب معدل هبوط الطرف العلوى للسلم عندما يكون السلم مائلًا على الأرض بزاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$

« $\frac{٢٠\times\sqrt{٣}}{٣}$ سم/ث»

٣٠ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث
فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل :

(أ) $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث (ب) $\frac{\pi}{٤}$ سم/ث (جـ) $\frac{١}{٨}$ سم/ث (د) ٨ سم/ث

(٢) دائرة يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٢ سم/د ومساحتها بمعدل ٢٠ π سم^{٢}/د ، فإن طول نصف قطرها عند هذه اللحظة يساوى سم.

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٣) تزداد مساحة سطح كرة بمعدل ثابت قدره ٦ سم^{٢}/ث عند اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطر الكرة ٣٠ سم فإن معدل الزيادة فى حجم الكرة = ... سم^{٣}/ث

(أ) ١٨٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٩٠ (د) ٩٠ π

(٤) وعاء فارغ حجمه ٤٥ سم^{٣} يصب فيه الماء بمعدل ٥ سم^{٣}/ث
فإن الوعاء يمتلئ بعد مرور ثانية.

(أ) ٩ (ب) ١٣٥ (جـ) ٤٥ (د) ٥

(٥) مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه يساوى ٦ سم وقياس الزاوية بينهما يساوى (س) فإذا تغير س بمعدل $\left(\frac{\pi}{٩٠}\right)^{c}$ فى الدقيقة فإن معدل تغير مساحة المثلث عند س = ٣٠° هو

(أ) $\pi \frac{\sqrt{٣}}{١٠}$ (ب) $\frac{\pi}{١٠}$ (جـ) ٩ $\sqrt{٣}$ (د) ٩

(٦) ترتبط الإزاحة ف التى يقطعها جسم مقذوف رأسيًا لأعلى مع الزمن ن بالعلاقة :
ف = ٤٩ ن − ٤,٩ ن^{٢} حيث ن الزمن مقدرًا بالثوانى.
فإن أقصى إزاحة يبلغها الجسم بعد مرور ثانية.

(أ) ٩,٨ (ب) ١٠ (جـ) ٥ (د) ٥٠

(٧) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د (س) عند نقطة ما = $\frac{١}{٢}$ وكان الإحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات/ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادى يساوى وحدة/ث.

(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $-\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٨) إذا كان معدل التغير فى مساحة الدائرة يساوى معدل التغير فى طول قطرها عدديًا فإن : نق = ...

(أ) $\frac{٢}{\pi}$ (ب) $\frac{١}{\pi}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

(٩) يزداد طول ضلع مكعب بمعدل ٥ سم/ث فإن حجم المكعب يزداد بمعدل
سم^{٣}/ث عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم.

(أ) ١٥٠٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٤٥ (د) ٥٠

(١٠) إذا كان طول ضلع مكعب يساوى طول قطر الكرة وكان طول الضلع وطول نصف القطر يتزايدان بنفس المعدل فإن النسبة بين تزايد مساحتيهما الكلية = ...

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi ٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{\pi ٢}$ (د) $\frac{٣}{\pi}$

(١١) شاهد رجل يقف على سطح الأرض طائرة تمر فوقه تمامًا على ارتفاع ٣ كم وتطير أفقيًا بسرعة ٤٨٠ كم/س فإن معدل تغير المسافة بين الرجل والطائرة بعد ٣٠ ثانية من مرور الطائرة فوق الرجل = ...

(أ) $\frac{٣٢٠}{٣}$ كم/ساعة (ب) ٣٨٤ كم/ث (جـ) ٣٨٤ م/ث (د) $\frac{٣٢٠}{٣}$ م/ث

(١٢) خزان أسطوانى طول نصف قطر قاعدته ٢٥ سم وارتفاعه ١٢٠ سم يصب فيه الزيت بمعدل $\frac{٥٠٠٠}{ل + ٤٠}$ سم^{٣}/ثانية حيث ل ارتفاع الزيت عند أى لحظة

فإن معدل ارتفاع الزيت فى الخزان = ... سم/ث عندما يمتلىء نصفه.

(أ) $\frac{٤}{٢٥}\pi$ (ب) $\frac{١}{\pi ٢٥}$ (جـ) $\frac{٢}{\pi ٢٥}$ (د) $\frac{٨}{\pi ٢٥}$

(١٣) سلم طوله ١٠ متر يستند طرفه العلوى على حائط رأسى وطرفه السفلى على أرض أفقيه فإذا انزلق الطرف السفلى بسرعة ٢ م/د فإن معدل تغير زاوية ميل السلم على الأفقى فى اللحظة التى يبعد فيها الطرف السفلى عن الحائط ٨ م يساوى دائرى/دقيقة.

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $-\frac{١}{٣}$

(١٤) صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢ ل سم فإذا كان طول ضلع الصفيحة يزداد بالتسخين بمعدل $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$ سم/ث فإن مساحة الصفيحة تزداد بمعدل سم^{٢}/ث.

(أ) $\frac{٢}{٥}$ل (ب) $\frac{١}{٥}$ل (جـ) $\frac{٤}{٥}$ل (د) $\frac{١}{١٠}$ل

(١٥) إذا كانت ص موجبة وتزداد فإن قيمة ص التى عندها يكون معدل زيادة ص^{٣} يساوى ٤ أمثال معدل زيادة ص هى

(أ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) ٢$\sqrt{٣}$ (د) ٣$\sqrt{٢}$

(٣١) مستطيل طوله ١٢ سم ، وعرضه ٥ سم فإذا كان الطول يتناقص بمعدل ١ سم/دقيقة بينما يتزايد العرض بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/دقيقة فأوجد متى يصبح الشكل مربعًا. ثم أوجد الزمن الذى تتوقف فيه المساحة عن الزيادة وكم تكون المساحة وقتئذٍ ؟ « $\frac{١٤}{٣}$ ث ، ١ ث ، ٦٠,٥ سم^{٢} »

٤٥ يتمدد هرم رباعى منتظم من المعدن ارتفاعه يساوى طول ضلع قاعدته فيزداد حجم بمعدل ١ سم^{٣}/ث ، إذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم وطول ضلع قاعدته يساوى ٠,٠١ سم/ث فأوجد طول ضلع قاعدته.

« ١٠ سم

٤٦ منشور قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٤ سم ويزداد بمعدل ٢ سم/ث وارتفاعه ٨ سم وينقص بمعدل ٤ سم/ث فبأى معدل يزداد حجم المنشور وبعد كم ثانية يقف حجمه عن الزيادة.

« ٦٤ سم^{٣}/ث ، $\frac{٢}{٣}$ث

٤٧ إذا كانت مساحة دائرة تزداد بمعدل ثابت أثبت أن معدل الزيادة فى محيط الدائرة يتناسب عكسى مع طول نصف القطر.

٤٨ بالون كروى مملوء بالغاز يتسرب منه الغاز بمعدل س سم^{٣}/ث ، أثبت أن معدل نقص مساحته فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره نق سم يساوى $\frac{٢ س}{نق}$ سم^{٢}/ث.

٤٩ تتحرك نقطة على المنحنى : ص = ٤ س − ٢ س^{٣} بحيث يتناقص إحداثيها الصادى بمعدل ٥ وحدات/ث أوجد معدل تغير ميل المنحنى عندما يكون س = ٢

« −٦ وحدات/ث

٥٠ بدأت نقطة الحركة من نقطة الأصل وفى الاتجاه الموجب لمحور السينات بسرعة ٥ سم/ث أوجد معدل التغير البعد بينها وبين النقطة (٩ ، ٨) بعد مرور ثلاث ثوانى من بدء الحركة.

« ٣ سم/ث

٥١ تتحرك نقطة على منحنى الدالة د (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٥}$ بحيث يزيد إحداثيها السينى بمعدل ٣ $\sqrt{١٠}$ سم/ث أوجد معدل تغير بعدها عن النقطة (١ ، ٠) عندما س = ٢

« ٩ سم/ث

٥٢ تتحرك النقطة أ (س ، ص) على منحنى الدالة ص = س^{٣} + س بحيث $\frac{ع ص}{ع ن}$ = ٢ وحدة/ث أوجد معدل التغير فى مساحة المثلث أ و ب حيث (و) نقطة الأصل ، النقطة ب (٠ ، ٦) فى اللحظة التى يكون فيها الإحداثى السينى للنقطة المتحركة يساوى ٣

« $\frac{٣}{١٤}$ وحدة مربعة/ث

٥٣ صفيحة على شكل سداسى منتظم تنكمش بالبرودة ، وُجِدَ أن معدل تغير طول ضلعها ٠,١ سم/ث ، أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠ سم.

«$-٣\sqrt{٣}$ سم^{٢}/ث»

٥٤ مُثمن منتظم طول ضلعه ١٠ سم ويتزايد بمعدل ٠,٢ سم/ث أوجد معدل تزايد مساحته.

«١٩,٣ سم^{٢}/ث»

٥٥ (دور ثان ٢٠١٤) رجل طوله ١٧٠ سم يسير بسرعة ٢م/ث فى خط مستقيم متجهًا نحو قاعدة مصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٦٨٠ سم.

أوجد : ① معدل تغير طول ظل الرجل.

② سرعة تحرك نهاية ظل الرجل. «$-\frac{٢}{٣}$ م/ث ، $-\frac{٨}{٣}$ م/ث»

٥٦ (دور ثان ٢٠٠٥) رجل طوله ١٨٠ سم يسير بسرعة ١٥٠ سم/ث فى اتجاه مصباح يرتفع ٤٨٠ سم فوق سطح الأرض.

أوجد : ① معدل تغير طول ظل الرجل.

② معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٣٠٠ سم من قاعدة المصباح. «-٩٠ سم/ث ، $-٧٥\sqrt{٢}$ سم/ث»

٥٧ يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعدًا عن قاعدة مصباح ارتفاعه ٣ أمتار بمعدل ١,٢ م/ث أوجد معدل تغير طول ظل الرجل. وإذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية قياسها θ° عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س مترًا فأثبت أن س = $\frac{٦}{٥}$ ظا θ ، ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣,٦ متر عن قاعدة المصباح. «١,٨ م/ث ، $\left(\frac{-١}{١٠}\right)^{\circ}$/ث»

٥٨ يصعد رجل طوله ١٧٠ سم بسرعة منتظمة ٦ م/دقيقة أعلى منحدر يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٧}{٢٤}$ وطوله ٢٥ مترًا وهناك مصباح مثبت على ارتفاع ١١$\frac{١}{٤}$ مترًا فوق المستوى الأفقى المار بقاعدة المنحدر رأسيًا فوق أعلى نقطة للمنحدر أوجد معدل انكماش طول ظل الرجل وكذلك معدل اقتراب نهاية ظل الرجل من أعلى نقطة للمنحدر. «٤ م/د ، ١٠ م/د»

٥٩ قضيب طوله ٥ أمتار مثبت بمفصل فى الأرض عند أحد طرفيه ، فإذا رفع طرفه الآخر رأسيًا إلى أعلى بواسطة ونش بمعدل ١ متر/دقيقة أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الأرض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣ أمتار. « $\frac{-٣}{٤}$ م/د »

٦٠ فى سباق ١٠٠ متر ، يجرى لاعب فى مسار مستقيم باتجاه خط النهاية ، وكانت إحدى كاميرات خط النهاية على ارتفاع ٥ أمتار وعمودية على مسار السباق وفى نفس المستوى الأفقى للمتسابقين. أوجد معدل تغير الزاوية التى تدور بها الكاميرا لرصد حركة اللاعب عندما كان على بعد ٥ أمتار من نهاية السباق ومعدل اقترابه لنقطة النهاية ١٠ م/ث. « $(-١)^{\circ}$ /ث »

٦١ (دور ثان ٢٠١٢) ينصهر الجليد المنتظم السمك والكثافة المتراكم على كرة معدنية مصمتة طول قطرها ١٢ سم بمعدل مقداره ٢٠ سم^{٣}/دقيقة فى اللحظة التى كان فيها معدل تناقص سمك طبقة الجليد مساويًا $\frac{١}{\pi\ ٢٠}$ سم/دقيقة بحيث يظل الجليد محتفظًا بشكله الكروى خلال فترة الانصهار وأن π هى النسبة التقريبية.

أوجد عند هذه اللحظة كلاً من :

(١) سمك طبقة الجليد.

(٢) معدل تغير مساحة السطح الخارجى لهذه الطبقة. « ٤ سم ، ٤ سم^{٢}/دقيقة »

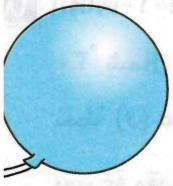
٦٢ كرة جوفاء طولا نصفى قطريها الداخلى والخارجى فى أى لحظة هما $نق_{١}$ ، $نق_{٢}$ على الترتيب. فإذا كان طول نصف قطرها الداخلى يزداد بمعدل ١ سم/ث بحيث يظل حجم مادة الكرة ثابتًا ، وذلك عند اللحظة التى يكون فيها $نق_{١}$ = ٣ سم ، $نق_{٢}$ = ٩ سم

أوجد عند هذه اللحظة :

(١) معدل تغير نصف قطرها الخارجى. (٢) معدل تغير مساحة سطحها الخارجى.

(٣) معدل تغير سمكها. « $\frac{١}{٩}$ سم/ث، ٨ π سم^{٢}/ث ، $\frac{-٨}{٩}$ سم/ث »

٦٣ يتسرب غاز من بالون كروى بمعدل ٢٠ سم^{٣}/ث أوجد معدل تغير طول نصف قطر البالون فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره ١٠ سم ، ثم أوجد معدل تغير مساحة السطح الخارجى للبالون فى نفس اللحظة.



« $\frac{-١}{\pi\ ٢٠}$ سم/ث ، -٤ سم^{٢}/ث »

٦٤ بالون كروى حجمه ٨٤ π سم^{٣} مملوءة بغاز ونتيجة لتسرب الغاز فإن حجم البالون ينقص بمقدار ٨ π سم^{٣}/دقيقة محتفظًا بشكله الكروى.

أوجد : ① معدل تغير نصف قطر البالون عندما يكون طول نصف قطره = ٤ سم

② معدل تغير نصف قطر البالون بعد ستة دقائق من بدء تسرب الغاز.

«$-\frac{١}{٨}$ سم/دقيقة ، $-\frac{٢}{٩}$ سم/دقيقة»

٦٥ (دور أول ٢٠٠٨) كرة يتغير حجمها ح بانتظام محتفظة بشكلها الكروى وعند أى لحظة زمنية ن ثانية كان طول نصف قطرها نق سم ومساحة سطحها مـ سم^{٢}

أثبت أن : $\frac{د ح}{د ن} \times \frac{د نق}{د ن} = \frac{١}{\pi ١٦} \times \left(\frac{د مـ}{د ن}\right)^{٢}$ **ومن ثم احسب قيمة :** $\frac{د نق}{د ن}$

عندما يكون $\frac{د ح}{د ن} = \pi$ سم^{٣}/ث ، $\frac{د مـ}{د ن} = ٢ \pi$ سم^{٢}/ث وأوجد عندئذ مساحة سطح الكرة.

«$\frac{١}{٤}$ سم/ث ، ٤ π سم^{٢}»

٦٦ كتلة معلومة من غاز درجة حرارتها ثابتة ، انقص حجمها بمعدل ثابت قدرة ٢ سم^{٣}/ث. فإذا كان الضغط يتناسب عكسيًا مع الحجم وأن الضغط يعادل ١٠٠٠ ث جم/سم^{٢} عندما يكون الحجم ٢٥٠ سم^{٣}. أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يصبح حجم الغاز ١٠٠ سم^{٣}

«٥٠ ث.جم / سم^{٢}/ث»

٦٧ فى دائرة كهربية مغلقة ، إذا كان حـ فرق الجهد (فولت) ، ت شدة التيار (أمبير) ، م المقاومة (أوم) وتزايد فرق الجهد بمعدل ١ فولت/ث ، وتناقص شدة التيار بمعدل $\frac{١}{٢}$ أمبير/ث أوجد معدل تغير المقاومة فى اللحظة التى يكون فيها حـ = ١٢ فولت ، ت = ٢ أمبير.

«٢ أوم/ث»

٦٨ (دور أول ٢٠١٠) من نقطة الأصل (و) فى مستوى إحداثى متعامد تحركت نقطة أ فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق بسرعة مقدارها ٤ متر/دقيقة ، وبعد دقيقة تحركت نقطة ب من نفس نقطة (و) على المستقيم $\overleftrightarrow{و ب}$ الذى معادلته : س + $\sqrt{٣}$ ص = ٠

بسرعة مقدارها ٦ متر/دقيقة وفى الاتجاه الذى يجعل ∠ ب و أ حادة. أوجد معدل تغير المسافة بين النقطتين أ ، ب بعد مضى دقيقتين من تحرك النقطة ب «٥ م/دقيقة»

٦٩ يسير قطارًا بادئًا حركته فى الحادية عشر صباحًا فى اتجاه الشرق بسرعة ٤٥ كم/س بينما بدأ قطار آخر حركته الساعة ١٢ ظهرًا من نفس النقطة متجهًا إلى الجنوب بسرعة ٦٠ كم/س أوجد معدل زيادة المسافة بينهما عند الساعة الثالثة ظهرًا. « ٥٢,٥ √٢ كم/س »

٧٠ فى الساعة الثامنة صباحًا كانت سفينة تقع على بعد ٦٠ كم شرق ميناء معين وتقترب منا بسرعة ١٠ كم/ساعة وفى الساعة التاسعة صباحًا خرجت من الميناء سفينة أخرى متجهة نحو الجنوب بسرعة ٣٠ كم/ساعة. أوجد معدل تغير البعد بين السفينتين فى الساعة العاشرة صباحًا وهل تقترب السفينتان أم تبتعدا حينئذ ؟ « ١٠ كم/ساعة »

٧١ أقلعت طائرة من مطار القاهرة من نقطة أ تصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٦٠° قطعت مسافة ١٥ كم فى هذا الاتجاه ثم سارت أفقية مبتعدة عن المطار بسرعة ٧٥٠ كم/ساعة. أوجد معدل تغير بعد الطائرة عن نقطة الإقلاع أ بعد مرور دقيقتين على سيرها أفقيًا. « $\frac{٤٨٧٥}{٧}$ كم/ساعة »

٧٢ بدأت سفينة الحركة من موقع أ بسرعة منتظمة ١٨ كم/ساعة فى اتجاه الشمال وبعد ساعتين سارت فى اتجاه يصنع ٣٠° شمال الشرق. أوجد معدل تغير المسافة بين موضع السفينة والموقع أ بعد ٤ ساعات من بدء الحركة. « ٩ √٣ كم/ساعة »

٧٣ أبحرت سفينة من ميناء الساعة التاسعة صباحًا متجهة نحو الغرب بسرعة ٢٠ كم/ساعة وبعد ساعة ابحرت سفينه أخرى من نفس الميناء بسرعة ٤٠ كم/ساعة فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب. أوجد معدل التباعد بين السفينتين الساعة ١١ صباحًا. « ٣٠ كم/ساعة »

٧٤ شاهد رجل يقف عند ضفة نهر قارب متحرك فى خط مستقيم موازيًا لضفة النهر ويبعد عن ضفة النهر ١٠ متر وعندما كان الخط الواصل بين الرجل والقارب يميل على ضفة النهر بزاوية قياسها ٣٠° كان معدل تغير هذه الزاوية يساوى $\frac{١}{٢}$ دائرى/ثانية. أوجد سرعة القارب عند هذه اللحظة. « ٢٠ م/ث »

٧٥ (دور ثان ٢٠٠٦) $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ طريقان متعامدان يحصران زاوية قياسها ٩٠° ، تحركت سيارة على الطريق $\overleftarrow{أب}$ من أ بسرعة ٤٠ كم/ساعة وبعد ١٠ دقائق تحركت سيارة أخرى على الطريق $\overleftarrow{أحـ}$ من نقطة أ بسرعة ٦٠ كم/ساعة. أوجد معدل تباعدهما بعد مضى ٢٠ دقيقة من بدأ تحرك السيارة الثانية. « ٥٠ √٢ كم/س »

٧٦ (دور أول ٢٠٠٧) $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$ طريقان متعامدان ، أحـ = بحـ = ١٠٠٠ متر يسير رجلان الأول من أ نحو حـ بسرعة منتظمة ٥٠ متر/دقيقة ، والثانى من ب نحو حـ بسرعة منتظمة ١٠٠ متر/دقيقة ، أثبت أن : البعد بين الرجلين بعد مضى ن دقيقة من لحظة انطلاقهما معًا يعطى بالعلاقة : ف^{٢} = (١٠٠٠ − ٥٠ ن)^{٢} + (١٠٠٠ − ١٠٠ ن)^{٢}

ثم أوجد : (١) معدل تغير المسافة بينهما بالنسبة للزمن عندما تكون ن = ٤

(٢) متى يبدأ الرجلان فى التباعد عن بعضهما ؟ «−١٠٠ م/دقيقة ، ١٢ دقيقة»

٧٧ $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$ شعاعان يحصران بينهما زاوية ١٥٠° تتحرك أ على $\overleftarrow{وس}$ بسرعة ثابتة قدرها ٤ سم/ثانية وكانت ب نقطة أخرى تتحرك على $\overleftarrow{وص}$ بحيث تكون مساحة سطح Δ وأب ثابتة وتساوى ٣٠ سم^{٢} . أوجد مقدار واتجاه سرعة ب عندما يكون و أ = ٨ سم.

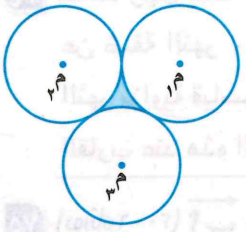
«٧,٥ سم/ث فى اتجاه $\overleftarrow{بو}$»

٧٨ حبل طوله ٥٠ متر يمر حول بكرة ترتفع عن الأرض ٢٤ متر مربوط بطرفه ثقل والطرف الآخر مربوط فى سيارة تسير على الأرض بسرعة ١٨ م/ث أوجد معدل ارتفاع الثقل فى اللحظة التى تبعد فيها السيارة مسافة ٣٢ متر عن مسقط البكرة. «١٤,٤ م/ث»

٧٩ مصباح مضىء مثبت فى قمة برج ارتفاعه ١٦ متر فإذا سقطت كرة من نفس الارتفاع من شرفة منزل تبعد ١٥ متر عن المصباح. أوجد سرعة تحرك ظل الكرة على الأرض عندما تكون الكرة على ارتفاع ٦ متر عن سطح الأرض. «−٣٣,٦ م/ث»

٨٠ عمود إنارة طوله ١٥ مترًا أعلاه مصباح قذفت كرة رأسيًا إلى أعلى بسرعة ٥ أمتار/ث من مسافة قدرها ١٢ مترًا من قاعدة العمود. أوجد معدل ابتعاد ظل الكرة على الأرض من قاعدة العمود عند منتصف الثانية الأولى. «٠,٠٩٥٥٥ م/ث»

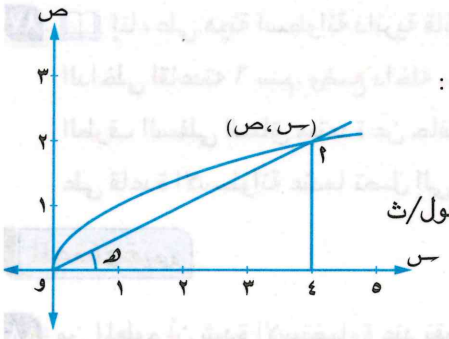
٨١ **فى الشكل المقابل :**



ثلاث دوائر متطابقة ومتماسة مثنى مثنى طول نصف قطر كل منها نق تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها فإذا كان طول نصف قطر كل منها يتمدد بمعدل ١ سم/د

أوجد معدل التغير فى مساحة المنطقة المظللة فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطر كل منها ١٠ سم. «(٢٠√٣ − ١٠ π) سم/د»

٨٢ (دور أول ٢٠١٣) فى الشكل المقابل :



يتحرك جسيم (س ، ص) على منحنى الدالة :

ص = $\sqrt{\text{س}}$ وعندما س = ٤ كان الإحداثى الصادى لموضع الجسيم يتزايد بمعدل ١ وحدة طول/ث

(١) ما هو معدل تغير الاحداثى السينى عند هذه اللحظة ؟

(٢) ما هو معدل تغير المسافة بين نقطة الأصل والجسيم عند نفس اللحظة ؟

(٣) ما هو معدل تغير زاوية الميل هـ عند نفس اللحظة ؟

« ٤ وحدة طول/ث ، $\frac{\sqrt{٩}}{٥}$ وحدة طول/ث ، $\left(\frac{١}{٥}\right)^{٦}$ /ث »

٨٣ بدأت النقطتان أ ، ب الحركة معًا من نقطة الأصل (و) بحيث تتحرك النقطة أ فى الاتجاه الموجب لمحور السينات بسرعة ٢ وحدة طول / ث وتتحرك النقطة ب فى الربع الأول على منحنى الدالة د : د (س) = $\text{س}^{٢}$ بحيث يبقى طول $\overline{\text{و ب}}$ = طول $\overline{\text{أ ب}}$ دائمًا أوجد معدل التغير فى مساحة Δ أ ب و بعد ٥ ثوان من بدء الحركة. « ٧٥ وحدة مربعة/ث »

٨٤ تتحرك النقطة أ على دائرة الوحدة فى الربع الأول وكانت سرعة إحداثيها السينى تساوى ٣ وحدة/ث فأوجد معدل تغير الإحداثى السينى لنقطة تقاطع المماس للدائرة عند أ مع محور السينات عندما يكون الإحداثى السينى لنقطة تقاطع المماس مع محور السينات يساوى ٢ وحدة. « -١٢ وحدة/ث »

٨٥ إذا كانت النقطة أ تتحرك فى الاتجاه الموجب لمحور السينات مبتدأة من نقطة الأصل (و) بسرعة $\frac{٢}{٣}$ وحدة طول/د وكانت ب (٠ ، ٢) ، حـ (٠ ، ٤)

أوجد معدل تغير الزاوية (د ب أ حـ) عندما تصل النقطة أ إلى (٢ ، ٠) « $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٦}$ / د »

٨٦ ماسورة مياه طرفاها أ ، ب ، وطولها ٥ أمتار ، تستند بطرفها أ على أرض أفقية وبإحدى نقطها ء على سور رأسى ارتفاعه ٣ أمتار. فإذا انزلق الطرف أ مبتعدًا عن السور بمعدل $\frac{٥}{٤}$ متر/د أوجد معدل هبوط الطرف ب عندما تصل إلى حافة السور. « $\frac{-٣}{٥}$ م/د »

٨٧ إناء على هيئة اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها من الداخل ٩ سم وطول نصف القطر الداخلى لقاعدته ٦ سم. وضع داخله ساق معدنية طولها ١٦ سم ، فإذا كان معدل انزلاق الطرف السفلى للساق مبتعدة عن حافة الاسطوانة ٢ سم/ث ، أوجد معدل انزلاق الساق على قاعدة الاسطوانة عندما تصل إلى نهاية قاعدتها.

«$\frac{٥}{٢}$ سم/ث»

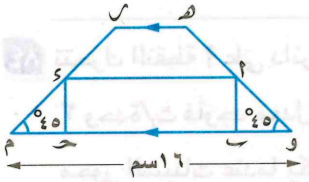
للمتفوقين

٨٨ من المعلوم أن شدة الاستضاءة عند نقطة تتناسب عكسيًا مع مربع البعد عن مصدر الضوء. يتحرك قارب فى اتجاه منارة بسرعة ثابتة فإذا كان ارتفاع المنارة ١٠٠ متر، أثبت أن معدل ازدياد شدة الاستضاءة عند القارب عندما يكون على بعد ١٠٠ متر من قاعدة المنارة = $\frac{٢٥}{٨}$ مرة قدر معدلها عندما كان القارب على بعد ٢٠٠ متر من قاعدة المنارة.

٨٩ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين. طول قاعدته ب حـ = ٦ سم ، ارتفاعه يساوى ٨ سم ، $\overline{ل م}$ يوازى $\overline{ب حـ}$ ويقطع $\overline{أ ب}$ فى ل ، $\overline{أ حـ}$ فى م ، فإذا علم أن ارتفاع شبه المنحرف ل ب حـ م يتناقص بمعدل ٠,٥ سم/ث. أوجد معدل تناقص مساحة شبه المنحرف ل ب حـ م عندما يكون $\overline{ل م}$ منصفا للضلعين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$

«-١,٥ سم^٢/ث»

٩٠ **فى الشكل المقابل :**



هـ و م ر شبه منحرف متساوى الساقين

ويميل كل من ساقية بزاوية ٤٥° على القاعدة الكبرى، أ ب حـ ء مستطيل بحيث تتحرك أ من هـ إلى و.

وتتحرك ء من (ر) إلى (م) فإذا كان معدل تغير طول أ ب = $\frac{١}{٤}$ سم/ث

فأوجد معدل تغير مساحة المستطيل أ ب حـ ء عندما يكون طول $\overline{أ ب}$ = ٣ سم

واحسب مساحة المستطيل عندما تتوقف مساحته عن الزيادة.

«-١ سم^٢/ث ، ٣٢ سم^٢»

٩١ قمع على هيئة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٣٥ سم ونصف قطر قاعدته ٧ سم ثبت بحيث يكون محوره رأسيًا ورأسه إلى أسفل يصب فيه الزيت بمعدل ٥,٤ سم^٣/ث بينما يتسرب الزيت من ثقب عند رأسه بمعدل ٣,٢ سم^٣/ث أوجد المعدل الذى يرتفع به الزيت فى القمع عندما يصل الزيت إلى ارتفاع ٢٥ سم. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧} \right)$

«٠,٠٢٨ سم/ث»

٩٢ مخروط دائرى قائم رأسه لأسفل طول نصف قطر قاعدته ٨٠ سم وارتفاعه ١٦٠ سم يتسرب منه الماء ويتجمع فى وعاء أسطوانى الشكل نصف قطر قاعدته ٥٠ سم. أوجد ارتفاع الماء فى المخروط فى اللحظة التى يكون فيها معدل هبوط الماء فى المخروط مساويًا لمعدل ارتفاع الماء فى الأسطوانة.

«١٠٠ سم»

مسائل تدرس بعد دراسة الهندسة الفراغية

٩٣ متوازى مستطيلات أبعاده فى لحظة ما هى ٣ ، ٤ ، ١٢ سم فإذا كان معدل تزايد بعده الأول ٢ سم/ث ومعدل تزايد بعده الثانى ١ سم/ث ومعدل تناقص بعده الثالث ٣ سم/ث.

أوجد : ① حجم متوازى المستطيلات فى أى لحظة زمنية (ن)

② معدل تغير حجم متوازى المستطيلات فى نهاية ٢ ثانية.

③ معدل تغير طول قطر متوازى المستطيلات عند نفس اللحظة.

«-١٢ سم^{٣}/ ث ، $\frac{٢}{١١}$ سم/ث»

٩٤ يعبر رجل كوبرى يعلو سطح الماء بمقدار ١٢ مترًا بسرعة منتظمة ٣ م/دقيقة شاهد قارب يسير فى اتجاه عمودى على الكوبرى بسرعة منتظمة ٦ م/دقيقة فى اللحظة التى كان فيها تحته تمامًا. أوجد المعدل الذى يبتعد به كل منهما عن الآخر بعد ٦ دقائق من اللحظة التى كانا فيها على خط رأس واحد.

« $\frac{٤٥}{٧}$ م/د»

٩٥ تطير طائرة أفقيًا على ارتفاع ٢٠٠٠ متر متجهة نحو الجنوب بسرعة ١٥٠ متر/ث فمرت على سيارة تسير بسرعة ٧٥ متر/ث متجهة نحو الشرق. أوجد المعدل الذى تبتعد به الطائرة عن السيارة بعد ٤٠ ث.

« $\frac{٥}{٧}$ ١٦٠ متر/ثانية»

الوحدة

2

تفاضل وتكامل
الدوال الأسية واللوغاريتمية

* متطلبات قبلية جبرية - الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى ودالة اللوغاريتم الطبيعى.

الدرس الأول — نهايات الدوال المرتبطة بالعدد هـ

الدرس الثانى — مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية.

الدرس الثالث — تكامل يتضمن الدوال الأسية واللوغاريتمية.

متطلبات قبلية جبرية - الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى ودالة اللوغاريتم الطبيعى

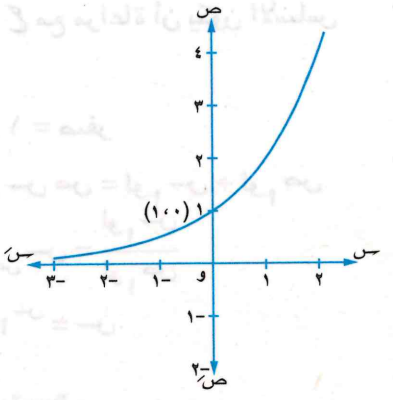
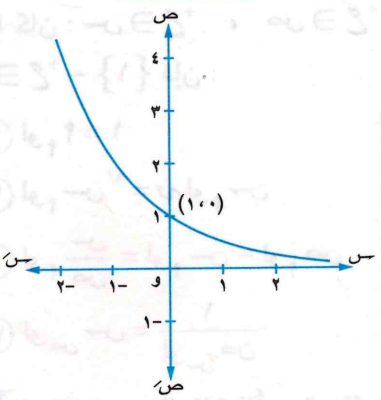
تذكر أن

١ الدالة الأسية :

* إذا كان : أ ∈ ح$^+$ − {١} فإن الدالة : د : ح ⟵ ح$^+$ حيث د (س) = أ^{س}

تسمى دالة أسية أساسها (أ) وهى دالة أحادية مجالها = ح ، مداها = ح$^+$ ومنحناها يمر بالنقطة (٠ ، ١)

* الشكل البيانى للدالة الأسية د : د (س) = أ^{س} يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ :

أ > ١	٠ < أ < ١
	

* المنحنى ص = أ$^{س + ب}$ + حـ يمثل بيانيًا بنفس المنحنى ص = أ^{س} بانتقال (−ب ، حـ)

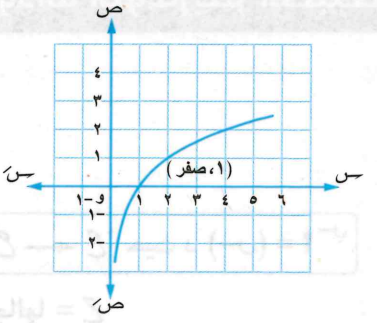
٢ الدالة اللوغاريتمية :

* إذا كان : أ ∈ ح$^+$ − {١} فإن الدالة د : د : ح$^+$ ⟵ ح حيث د (س) = لو$_{أ}$ س

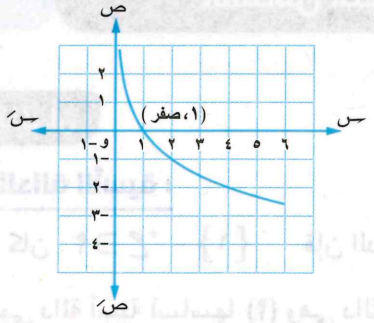
تسمى دالة لوغاريتمية أساسها (أ) وهى دالة أحادية مجالها = ح$^+$ ومداها = ح ومنحناها يمر بالنقطة (١ ، ٠)

* الشكل البيانى للدالة اللوغاريتمية د : د (س) = لو$_{أ}$ س يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ :

إذا كانت ١ < أ



إذا كانت ٠ < أ < ١



* المنحنى ص = لو$_{أ}$ (س + ب) + حـ يمثل بيانيًا بنفس المنحنى ص = لو$_{أ}$ س بانتقال (−ب ، حـ)

* اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم الذى أساسه = ١٠

* **بعض خواص اللوغاريتمات**

إذا كان : س ∈ ح$^{+}$ ، ص ∈ ح$^{+}$ ، ن ∈ ح مع مراعاة أن يكون الأساس

أ ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن :

① لو$_{أ}$ أ = ١

② لو$_{أ}$ ١ = صفر

③ لو$_{أ}$ س^{ن} = ن لو$_{أ}$ س

④ لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

⑤ لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{أ}$ س − لو$_{أ}$ ص

⑥ لو$_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}_{أ}\ س}{\text{لو}_{أ}\ ص}$

⑦ لو$_{ص}$ س = $\frac{١}{\text{لو}_{س}\ ص}$

⑧ أ لو$_{أ}$ س = س

٣ العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية :

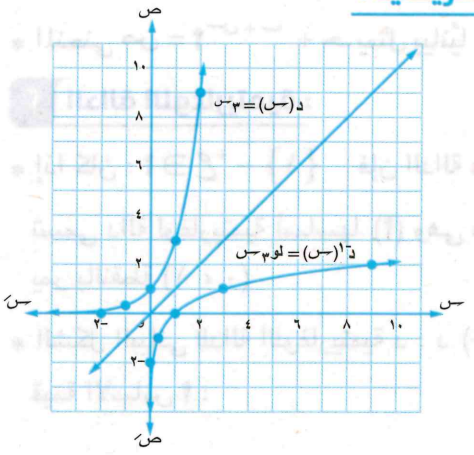
* إذا كان : أ ∈ ح$^{+}$ − {١}

، س ∈ ح$^{+}$

، ص ∈ ح

فإن : ص = لو$_{أ}$ س ⇔ س = أ^{ص}

* الدالة اللوغاريتمية هى الدالة العكسية للدالة الأسية.

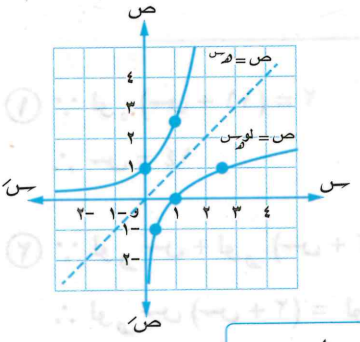


العدد النيبيرى (هـ) هو عدد غير نسبى ، ٢ < هـ < ٣

، هـ = ١ + $\frac{١}{|١}$ + $\frac{١}{|٢}$ + $\frac{١}{|٣}$ + ... = $\sum_{ن=٠}^{\infty}$ $\frac{١}{|ن}$ (متسلسلة ماكلورين)

العدد هـ ≈ ٢,٧١٨٢٨

* **الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى :**



د : ح ⟵ ح$^{+}$ حيث د (س) = هـ^{س}

دالة أسية أساسها (هـ) وهى دالة أحادية مجالها = ح

، مداها = ح$^{+}$

ومنحناها يمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (١ ، هـ)

* **دالة اللوغاريتم الطبيعى :** د : ح$^{+}$ ⟵ ح حيث د (س) = لو$_{هـ}$ س

دالة لوغاريتمية أساسها (هـ) وهى دالة أحادية مجالها = ح$^{+}$

، مداها = ح ومنحناها يمر بالنقطتين (١ ، ٠) ، (هـ ، ١)

للحظ أن

① إذا كان : س ∈ ح$^{+}$ ، ص ∈ ح فإن : ص = لو$_{هـ}$ س ⟺ س = هـ^{ص}

② الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى هى الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم الطبيعى.

③ * **من الشكل السابق نجد أن :** نهـــا$_{س \to \infty}$ لو$_{هـ}$ س = ∞ ، نهـــا$_{س \to ٠^{+}}$ لو$_{هـ}$ س = − ∞

* **بعض خواص اللوغاريتم الطبيعى :**

إذا كان : س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، ن ∈ ح مع مراعاة أن يكون الأساس ∈ ح$^{+}$ − {١} فإن :

① لو$_{هـ}$ هـ = ١

② لو$_{هـ}$ ١ = صفر

③ لو$_{هـ}$ س^{ن} = ن لو$_{هـ}$ س

④ هـ$^{\text{لو}_{هـ} س}$ = س

⑤ لو$_{هـ}$ س ص = لو$_{هـ}$ س + لو$_{هـ}$ ص

⑥ لو$_{هـ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{هـ}$ س − لو$_{هـ}$ ص

⑦ لو$_{ص}$ س = $\frac{\text{لو}_{هـ} س}{\text{لو}_{هـ} ص}$

⑧ لو$_{هـ}$ س × لو$_{س}$ هـ = ١

مثـال

حل كل من المعادلات الآتية :

① لو$_{٥}$ (س + ١١) = ٢ | ② لو$_{هـ}$ س + لو$_{هـ}$ (س + ٢) = لو$_{هـ}$ (س + ٦)

③ هـ$^{٣س - ٤}$ = ٢٣ | ④ ٢ هـ^{س} + ٢ هـ$^{-س}$ = ٥

الحـل

① ∵ لو$_{٥}$ (س + ١١) = ٢ ∴ س + ١١ = ٥^{٢} = ٢٥

∴ س = ١٤

② ∵ لو$_{هـ}$ س + لو$_{هـ}$ (س + ٢) = لو$_{هـ}$ (س + ٦)

∴ لو$_{هـ}$ س (س + ٢) = لو$_{هـ}$ (س + ٦) ∴ س (س + ٢) = س + ٦

∴ س^{٢} + س − ٦ = ٠ ∴ (س − ٢) (س + ٣) = ٠

∴ إما س = ٢ (تحقق) أ، س = −٣ (مرفوض)

③ ∵ هـ$^{٣س - ٤}$ = ٢٣ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو$_{هـ}$ هـ$^{٣س - ٤}$ = لو$_{هـ}$ ٢٣

∴ (٣ س − ٤) لو$_{هـ}$ هـ = لو$_{هـ}$ ٢٣

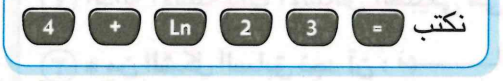
∴ ٣ س − ٤ = لو$_{هـ}$ ٢٣

∴ ٣ س = ٤ + لو$_{هـ}$ ٢٣

∴ س ≃ ٢,٣٨

لاحـظ أن

لكتابة ٤ + لو$_{هـ}$ ٢٣ على الآلة الحاسبة نكتب



④ ∵ ٢ هـ^{س} + ٢ هـ$^{-س}$ = ٥ بالضرب × هـ^{س}

∴ ٢ هـ^{٢س} − ٥ × هـ^{س} + ٢ = ٠ ∴ (٢ هـ^{س} − ١) (هـ^{س} − ٢) = ٠

∴ إما هـ^{س} = $\frac{١}{٢}$ أ، هـ^{س} = ٢

∴ س = لو$_{هـ}$ $\frac{١}{٢}$ ≃ −٠,٦٩ أ، س = لو$_{هـ}$ ٢ ≃ ٠,٦٩

تمارين على المتطلبات القبلية الجبرية - الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى ودالة اللوغاريتم الطبيعى

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① م = هـ^(لو_هـ ٧) فإن : م تساوى

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{هـ}$ (جـ) هـ (د) ٧

② مجموعة حل المعادلة : لو_هـ (س − ٣) + لو_هـ (س − ٢) = لو_هـ ٦ هى

(أ) {٠ ، ٥} (ب) {٥} (جـ) {٢ ، ٣} (د) ∅

③ منحنى الدالة د حيث د (س) = هـ^(س − ٣) + ٢ هو نفس منحنى ر : ر (س) = هـ^س بانتقال

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (٣ ، −٢) (د) (٣ ، ٢)

④ منحنى الدالة : د : د (س) = ١ + لو_هـ (س − ٢)

هو نفس منحنى الدالة ر : ر (س) = لو_هـ س بالانتقال

(أ) (١ ، ٢) (ب) (١ ، −٢) (جـ) (−٢ ، ١) (د) (٢ ، ١)

٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① لو (س − ٣) = ٢

② لو_هـ س = ٤

③ لو_٢ (س + ٧) = ٥

④ لو_هـ (٢ س + ١) = ٥

⑤ ٢ هـ^س = ٢١

⑥ هـ^س = ١٠

⑦ هـ^(٥ س + ١) = ٢٠

⑧ هـ^(٣ س + ١) = $\frac{١}{٢}$

⑨ ٧^س = ٢٥

⑩ لو_هـ (س + ١) − لو_هـ (س − ٢) = لو_هـ ٤

⑪ لو_هـ س + لو_هـ (س − ٣) = ٠

⑫ لو_هـ ٢ + لو_هـ س = ٤

⑬ لو_هـ ٤^(٢ س − ١) = لو_هـ ٥٠

⑭ لو_هـ هـ^س = ٣ لو_هـ ٣

⑮ ٢ لو_هـ (س − ٣) = لو_هـ (س + ٥) + لو_هـ ٤

⑯ س − س هـ^(٢ س − ٣) = ٠

⑰ ٢٤ − هـ^(−٢ س) = ١٠

⑱ هـ^س + ٦ هـ^(−س) = ٥

⑲ هـ^س + هـ^(−س) = ٢

⑳ ٥ هـ^(س^٢) = ٢٠٠

الدرس 1

نهايات الدوال المرتبطة بالعدد (هـ)

* إذا كانت د : د (س) = $\left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}$ وأردنا دراسة سلوك الدالة د عندما تكبر قيمة س وتقترب من ∞ وذلك بفرض أن س تأخذ القيم : ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ ، ... فنحصل على الجدول الآتى :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	←	∞
$\left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}$	٢	٢,٥٩٣٧٤	٢,٧٠٤٨١٣	٢,٧١٦٩٢٤	٢,٧١٨١٤٦	←	٢,٧١٨٢٨

ونلاحظ من الجدول السابق أنه كلما زادت قيمة س واقتربت من ∞ اقترب قيمة

$\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}$ من العدد الثابت هـ ≃ ٢,٧١٨٢٨

تعريف العدد (هـ) كنهاية

$$\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} = هـ$$

* بوضع $\frac{1}{س}$ = ص فى العلاقة السابقة حيث س ≠ ٠

∵ س ← ∞ تعنى أن ص ← صفر

فإن : $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} = \lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{1}{ص}}$

أى يمكن التعبير عن العدد (هـ) بالصورة هـ = $\lim_{س \to 0} (1 + س)^{\frac{1}{س}}$

لاحظ أن

التعويض المباشر يعطى حالة عدم التعيين (1^{∞})

مثال ١

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{2س}$

② $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س+٥}$

③ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{٤}{س}\right)^{س}$

الحـل

① $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{2س} = \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}\right)^{2}$

$= \left(\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}\right)^{2} = هـ^{2}$

② $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س+5} = \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} \times \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{5}\right]$

$= \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} \times \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{5}$

$= هـ \times (1 + 0)^{5} = هـ$

③ بوضع $ص = \frac{4}{س}$ حيث $س \neq 0$ فإن $ص \to 0$ عندما $س \to \infty$

$\therefore \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 + \frac{4}{س}\right)^{س} = \text{نهـــا}_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{4}{ص}} = \text{نهـــا}_{ص \to 0} \left((1 + ص)^{\frac{1}{ص}}\right)^{4}$

$= \left(\text{نهـــا}_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{1}{ص}}\right)^{4} = هـ^{4}$

ملاحظـة

من المثال السابق يمكن استنتاج أنه إذا كان أ عدد نسبى فإن :

① $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{أس} = هـ^{أ}$

② $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س+أ} = هـ$

③ $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 + \frac{أ}{س}\right)^{س} = هـ^{أ}$

④ $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 - \frac{أ}{س}\right)^{س+ك} = هـ^{-أ}$

فمثلًا : $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{7س} = هـ^{7}$ ، $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(1 - \frac{19}{س}\right)^{س} = هـ^{-19}$

مثال ٢

أوجد كلًا مما يأتي :

① $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\frac{س + ٤}{س - ٢}\right)^{س + ٣}$ ② $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\frac{س}{١ + س}\right)^{س}$

الحل

① $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\frac{س + ٤}{س - ٢}\right)^{س + ٣} = \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\frac{س - ٢ + ٦}{س - ٢}\right)^{س + ٣}$

$= \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٦}{س - ٢}\right)^{س + ٣}$

$= \text{نهـــا}_{س - ٢ \to \infty} \left(١ + \frac{٦}{س - ٢}\right)^{س - ٢}$

$\times \text{نهـــا}_{س - ٢ \to \infty} \left(١ + \frac{٦}{س - ٢}\right)^{٥} = هـ^{٦} \times (١)^{٥} = هـ^{٦}$

حل آخر : بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\frac{س + ٤}{س - ٢}\right)^{س + ٣} = \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\frac{١ + \frac{٤}{س}}{١ - \frac{٢}{س}}\right)^{س + ٣}$

$= \frac{\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٤}{س}\right)^{س + ٣}}{\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(١ - \frac{٢}{س}\right)^{س + ٣}}$

$= \frac{\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٤}{س}\right)^{س} \times \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٤}{س}\right)^{٣}}{\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(١ - \frac{٢}{س}\right)^{س} \times \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(١ - \frac{٢}{س}\right)^{٣}}$

$= \frac{هـ^{٤}}{هـ^{-٢}} \times \frac{(١ + ٠)^{٣}}{(١ - ٠)^{٣}} = هـ^{٦}$

② $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\frac{١ + س}{س}\right)^{-س} = \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{-س}$

$= \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}\right)^{-١}$

$= \left[\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{س}\right]^{-١} = هـ^{-١} = \frac{١}{هـ}$

أهم القواعد

① $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - 1}{س} = 1$

② $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{م}(1 + س)}{س} = لو_{م} هـ$ ومنها $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(1 + س)}{س} = 1$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{أ^{س} - 1}{س} = لو_{هـ} أ$ ومنها $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - 1}{س} = 1$

الإثبات

① $\lim_{س \to 0} هـ^{س} = هـ^{صفر} = 1$

② $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{م}(1 + س)}{س} = \lim_{س \to 0} [\frac{1}{س} لو_{م}(1 + س)] = \lim_{س \to 0} [لو_{م}(1 + س)^{\frac{1}{س}}]$

$= لو_{م} [\lim_{س \to 0} (1 + س)^{\frac{1}{س}}] = لو_{م} هـ$

* بوضع أ = هـ ينتج أن : $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(1 + س)}{س} = لو_{هـ} هـ = 1$

③ بوضع $أ^{س} - 1 = ص$ ∴ عند س ← 0 فإن : ص ← 0

ويكون $أ^{س} = 1 + ص$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $لو_{هـ} أ^{س} = لو_{هـ}(1 + ص)$ ∴ $س لو_{هـ} أ = لو_{هـ}(1 + ص)$

∴ $س = \frac{لو_{هـ}(1 + ص)}{لو_{هـ} أ}$

∴ $\lim_{س \to 0} \frac{أ^{س} - 1}{س} = \lim_{ص \to 0} \frac{ص \times لو_{هـ} أ}{لو_{هـ}(1 + ص)} = لو_{هـ} أ \times \lim_{ص \to 0} \frac{ص}{لو_{هـ}(1 + ص)}$

$= لو_{هـ} أ \times 1 = لو_{هـ} أ$

* بوضع أ = هـ ينتج أن : $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - 1}{س} = لو_{هـ} هـ = 1$

مثال ٣

أوجد : ① $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٤س} - ١}{س}$ ② $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٢س} - ١}{٣س}$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - س - ١}{س}$ ④ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{ماس} - ١}{س}$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٣س} - هـ^{٢س}}{س}$ ⑥ $\lim_{س \to ٥} \frac{هـ^{س} - هـ^{٥}}{س - ٥}$

الحل

① $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٤س} - ١}{س} = ٤ \times \lim_{٤س \to 0} \frac{هـ^{٤س} - ١}{٤س}$

[بوضع ٤س = ص ، عندما س ← ٠ فإن : ص ← ٠]

$= ٤ \times \lim_{ص \to 0} \frac{هـ^{ص} - ١}{ص} = ٤ \times ١ = ٤$

② $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٢س} - ١}{٣س} = \frac{٢}{٣} \times \lim_{٢س \to 0} \frac{هـ^{٢س} - ١}{٢س}$

[بوضع ٢س = ص ، عندما س ← ٠ فإن ص ← ٠]

$= \frac{٢}{٣} \times \lim_{ص \to 0} \frac{هـ^{ص} - ١}{ص} = \frac{٢}{٣} \times ١ = \frac{٢}{٣}$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - س - ١}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{(هـ^{س} - ١) - س}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - ١}{س} - \lim_{س \to 0} ١ = ١ - ١ = صفر$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{ماس} - ١}{س} = \lim_{س \to 0} \left[\frac{هـ^{ماس} - ١}{ماس} \times \frac{ماس}{س}\right]$

$= \lim_{ماس \to 0} \frac{هـ^{ماس} - ١}{ماس} \times \lim_{س \to 0} \frac{ماس}{س}$

$= ١ \times ١ = ١$

تذكر أن :

$\lim_{س \to 0} \frac{ماس}{س} = ١$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٣س} - هـ^{٢س}}{س} = \lim_{س \to 0} \left[\frac{هـ^{٢س}(هـ^{س} - ١)}{س}\right]$

$= \lim_{س \to 0} هـ^{٢س} \times \lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - ١}{س} = ١ \times ١ = ١$

⑥ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{هـ^{س} - هـ^{0}}{س - 0} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \left[\frac{هـ^{0}(هـ^{س-0} - 1)}{س - 0}\right]$

$= هـ^{0} \times \text{نهـــا}_{(س-0) \leftarrow 0} \frac{هـ^{س-0} - 1}{س - 0} = هـ^{0} \times 1 = هـ^{0}$

مثـال ٤

أوجد :

① $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{٢^{س} - 1}{س}$

② $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{لو}_{هـ}(1 + ٧س)}{س}$

③ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا}\ ٣س}{٣^{س} - 1}$

④ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 1} \frac{\text{لو}_{هـ} س}{س - 1}$

⑤ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} (1 + ٤\ \text{طا}^{٢}س)^{\text{طتا}^{٢}س}$

⑥ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{(هـ^{٢س} - 1)(1 - \text{جتا}\ ٢س)}{س^{٣}}$

الحـل

① $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{٢^{س} - 1}{س} = \text{لو}_{هـ}\ ٢$

② $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{لو}_{هـ}(1 + ٧س)}{س} = ٧\ \text{نهـــا}_{٧س \leftarrow 0} \frac{\text{لو}_{هـ}(1 + ٧س)}{٧س}$

[بوضع ص = ٧ س ∴ عندما س ← ٠ فإن : ص ← ٠]

$= ٧\ \text{نهـــا}_{ص \leftarrow 0} \frac{\text{لو}_{هـ}(1 + ص)}{ص} = ٧ \times 1 = ٧$

③ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا}\ ٣س}{٣^{س} - 1} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\frac{\text{جا}\ ٣س}{س}}{\frac{٣^{س} - 1}{س}} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا}\ ٣س}{س} \div \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \frac{٣^{س} - 1}{س}$

$= \frac{٣}{\text{لو}_{هـ}\ ٣}$

④ بوضع س − ١ = ص ∴ س = ص + ١ ، عندما س ← ١ فإن : ص ← ٠

∴ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow 1} \frac{\text{لو}_{هـ} س}{س - 1} = \text{نهـــا}_{ص \leftarrow 0} \frac{\text{لو}_{هـ}(ص + 1)}{ص} = 1$

⑤ بوضع ٤ ظا^{٢} س = ص ∴ ظا^{٢} س = $\frac{ص}{٤}$ ∴ ظا^{٢} س = $\frac{٤}{ص}$

، ∵ عندما س ← ٠ فإن : ص ← ٠

∴ نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ (١ + ٤ ظا^{٢} س)$^{\frac{٤}{ص}}$ ظا^{٢} س = نهـــا$_{ص \leftarrow ٠}$ (١ + ص)$^{\frac{٤}{ص}}$

= $\left(\text{نهـــا}_{ص \leftarrow ٠} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{٤}$ = هـ^{٤}

⑥ نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ $\left[\frac{هـ^{٢س} - ١}{س} \times \frac{١ - \text{جتا } ٢س}{س^{٢}}\right]$

= ٢ نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ $\left[\frac{هـ^{٢س} - ١}{٢س}\right]$ × نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{٢ \text{ جا}^{٢} س}{س^{٢}}$

= ٢ نهـــا$_{٢س \leftarrow ٠}$ $\left(\frac{هـ^{٢س} - ١}{٢س}\right)$ × ٢ نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ $\left(\frac{\text{جا } س}{س}\right)^{٢}$ = ٢ × ٢ × (١)^{٢} = ٤

للحظ أن

١ − جتا ٢س = ٢ جا^{٢} س

معلومة إثرائية

① لإيجاد نهـــا$_{ن \leftarrow \infty}$ $(١ + \frac{١}{ن})^{ن}$ تتبع الآتى :

∵ ن ← ∞ ∴ $\frac{١}{ن}$ ← ٠ ∴ $\frac{١}{ن}$ أقل من الواحد

∴ يمكن فك $(١ + \frac{١}{ن})^{ن}$ بنظرية ذات الحدين كما يلى :

$$(١ + \frac{١}{ن})^{ن} = ١ + ن(\frac{١}{ن}) + \frac{ن(ن - ١)}{٢!}(\frac{١}{ن})^{٢} + \frac{ن(ن - ١)(ن - ٢)}{٣!}(\frac{١}{ن})^{٣} + \ldots$$

$$= ١ + ١ + \frac{١}{٢!}(\frac{ن}{ن})(\frac{ن - ١}{ن}) + \frac{١}{٣!}(\frac{ن}{ن})(\frac{ن - ١}{ن})(\frac{ن - ٢}{ن}) + \ldots.$$

$$= ١ + ١ + \frac{١}{٢!}(١ - \frac{١}{ن}) + \frac{١}{٣!}(١ - \frac{١}{ن})(١ - \frac{٢}{ن}) + \ldots.$$

∴ نهـــا$_{ن \leftarrow \infty}$ $(١ + \frac{١}{ن})^{ن} = ١ + ١ + \frac{١}{٢!} + \frac{١}{٣!} + \ldots$ «متسلسلة تايلور»

∴ نهـــا$_{ن \leftarrow \infty}$ $(١ + \frac{١}{ن})^{ن}$ = هـ

② ∵ نهـــا$_{ن \leftarrow \infty}$ $(١ + \frac{س}{ن})^{ن}$ = هـ^{س} ، وبفك الطرف الأيمن بنظرية ذات الحدين

وإيجاد النهاية نجد أن : هـ^{س} = $١ + \frac{س}{١!} + \frac{س^{٢}}{٢!} + \frac{س^{٣}}{٣!} + \ldots$

تمارين

6

على نهايات الدوال المرتبطة بالعدد (هـ)

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد كل من النهايات الآتية :

(١) $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{3س}$

(٢) $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{1}{5}س}$

(٣) $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{م س}$

(٤) $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{5}{س}\right)^{س}$

(٥) $\lim_{ن \to \infty} \left(1 + \frac{2}{ن}\right)^{3ن}$

(٦) $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س+1}$

(٧) $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{2س+5}$

(٨) $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س+1}\right)^{2س}$

(٩) $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{4}{س}\right)^{س+3}$

(١٠) $\lim_{س \to \infty} \left(1 - \frac{1}{س}\right)^{2س}$

(١١) $\lim_{ن \to \infty} \left(\frac{ن}{ن+1}\right)^{ن}$

(١٢) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س+7}{س+3}\right)^{س+4}$

(١٣) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{2س-1}{2س+1}\right)^{2س}$

(١٤) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{2س+5}{2س+1}\right)^{س+2}$

٢ أوجد كل من النهايات الآتية :

(١) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{3س} - 1}{س}$

(٢) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{4س} - 1}{5س}$

(٣) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} + س - 1}{س}$

(٤) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - جاس - 1}{س}$

(٥) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{جاس} - 1}{جاس}$

(٦) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{طاس} - 1}{طاس}$

(٧) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{-س} - 1}{س}$

(٨) $\lim_{س \to 0} \frac{جا2س}{هـ^{س} - 1}$

(٩) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{طاس} - 1}{س}$

(١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{3^{س} - 1}{س}$

(١١) $\lim_{س \to 0} \frac{5^{س} - 1}{3^{س} - 1}$

(١٢) $\lim_{س \to 0} \frac{جا5س}{5^{س} - 1}$

(١٣) $\lim_{س \to 0} \frac{2^{جاس} - 1}{جاس}$

(١٤) $\lim_{س \to 0} \frac{4^{س} - 1}{ب^{س} - 1}$

(١٥) $\lim_{س \to 0} \frac{أ^{ماس} - ١}{ب^{ماس} - ١}$

(١٦) $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(١ + ٢س)}{س}$

(١٧) $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(١ + س^{٢})}{س^{٢}}$

(١٨) $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ}(١ + ٣س^{٢})}{٢س^{٢}}$

(١٩) $\lim_{س \to 0} \frac{أ^{٢س} - ١}{س}$

(٢٠) $\lim_{س \to 0} \frac{لو(١ + ٢س)}{٥^{س} - ١}$

(٢١) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٢+س} - هـ^{٢}}{س}$

(٢٢) $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{٤س} - هـ^{٣س}}{س}$

(٢٣) $\lim_{س \to 0} \frac{أ^{س} - ب^{س}}{س}$

(٢٤) $\lim_{س \to 0} \frac{أ^{س} - ب^{س}}{ماس}$

(٢٥) $\lim_{س \to 0} \frac{(١٠)^{ماس} - ١}{طاس}$

(٢٦) $\lim_{س \to 0} \frac{أ^{س} - أ^{-س}}{س}$

(٢٧) $\lim_{س \to 0} \frac{٣^{٢+س} - ٩}{س}$

(٢٨) $\lim_{س \to 0} \frac{٢^{٢س} - ٢^{٣س}}{س}$

(٢٩) $\lim_{س \to 0} \frac{٢^{س} - ١}{\sqrt{١ + س} - ١}$

(٣٠) $\lim_{س \to 0} \frac{أ^{س} + ب^{س} + حـ^{س} - ٣}{س}$

٣ أثبت أن : $\lim_{س \to 0} (١ + \frac{س}{أ})^{\frac{أ}{س}} = هـ$

٤ أثبت أن : $\lim_{ن \to \infty} ن [لو_{هـ}(ن + ١) - لو_{هـ} ن] = ١$

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{١}{س})^{٢س}$ يساوى

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) هـ (د) هـ^{٢}

(٢) $\lim_{س \to 0} (١ + س)^{\frac{١}{٣س}}$ يساوى

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) هـ^{٣} (جـ) هـ$^{\frac{١}{٣}}$ (د) $\frac{هـ}{٣}$

(٣) $\lim_{س \to 0} \frac{٢^{س} - ١}{٣س}$ يساوى

(أ) ٣ لو$_{هـ}$ ٢ (ب) $\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ ٢ (جـ) لو$_{هـ}$ $\frac{٢}{٣}$ (د) ٢ لو$_{هـ}$ ٣

④ $\lim_{س \to 0} (هـ^{س} - ٤) =$

(أ) -٤ (ب) -٣ (جـ) هـ (د) $هـ^{٤}$

⑤ $\lim_{س \to ١} \frac{\ln هـ^{س}}{س - ١}$ يساوى

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) هـ (د) $هـ^{-١}$

⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{\ln هـ (١ - س)}{س} =$

(أ) هـ (ب) $-هـ$ (جـ) -١ (د) ١

⑦ $\lim_{س \to ٣} \frac{\ln هـ (س - ٢)}{س - ٣} =$

(أ) هـ (ب) ١ (جـ) $هـ^{٢}$ (د) -١

⑧ $\lim_{س \to 0} \frac{١ - هـ^{٢س}}{١ - هـ^{س}} =$

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٢ (د) -٢

⑨ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س}{س + ك}\right)^{س} = هـ$ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) -٢ (د) ٢

٦ أوجد كل من النهايات الآتية :

① $\lim_{س \to ١} \frac{\ln س}{س - ١}$

② $\lim_{س \to 0} (١ + ٣ طا^{٢} س)^{طتا^{٢} س}$

③ $\lim_{س \to ٦} \frac{هـ^{س} - هـ^{٦}}{س - ٦}$

④ $\lim_{س \to 0} (١ + ٤ جا^{٢} س)^{قتا^{٢} س}$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{جتاس} - ١}{جتاس}$

⑥ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{هـ^{جتاس} - ١}{\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}$

⑦ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{ب س} - هـ^{أ س}}{س}$

⑧ $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - هـ^{جاس}}{س - جاس}$

⑨ $\lim_{س \to 0} \frac{س (هـ^{س} - ١)}{١ - جتا ٢ س}$

⑩ $\lim_{س \to هـ} \frac{\ln س - ١}{س - هـ}$

(١١) $\lim_{س \to 0} \frac{س (هـ^{٢س} - هـ^{٢})}{١ - جتاس}$

(١٢) $\lim_{س \to 0} \frac{(أ ب)^{س} - أ^{س} - ب^{س} + ١}{س^{٢}}$

(١٣) $\lim_{س \to 0} \frac{(١٠)^{س} - ٢^{س} - ٥^{س} + ١}{س جاس}$

(١٤) $\lim_{س \to 0} \frac{لو_{هـ} (٣ + س) - لو_{هـ} (٣ - س)}{س}$

(١٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{٣^{س} - ٩}{٢^{س} - ٤}$

(١٦) $\lim_{س \to 0^{+}} \frac{هـ^{س} - ١}{\sqrt{١ - جتاس}}$

الدرس 2

مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

مشتقة الدالة الأسية

① إذا كانت : د (س) = هـ^س فإن : دَ (س) = هـ^س

② إذا كانت : د (س) = ا^س فإن : دَ (س) = ا^س لو_هـ ا

وبصفة عامة : إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

* $\frac{ء(هـ^{ع})}{ء س} = هـ^{ع} \cdot \frac{ء ع}{ء س}$ * $\frac{ء(ا^{ع})}{ء س} = ا^{ع} لو_{هـ} ا \cdot \frac{ء ع}{ء س}$

الإثبات

① ∵ د (س) = هـ^س

، دَ (س) = $نهـا_{و \to .} \frac{د(س+و) - د(س)}{و} = نهـا_{و \to .} \frac{هـ^{س+و} - هـ^{س}}{و}$

$= نهـا_{و \to .} \frac{هـ^{س}(هـ^{و} - ١)}{و} = هـ^{س} \times نهـا_{و \to .} \frac{هـ^{و} - ١}{و} = هـ^{س} \times ١ = هـ^{س}$

أى أن : $\frac{ء}{ء س}(هـ^{س}) = هـ^{س}$

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{ء(هـ^{ع})}{ء س} = \frac{ء(هـ^{ع})}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$ «قاعدة السلسلة» ∴ $\frac{ء(هـ^{ع})}{ء س} = هـ^{ع} \cdot \frac{ء ع}{ء س}$

② من خواص اللوغاريتمات نجد أن : ا = هـ^{لو_هـ ا}

∴ ا^س = [هـ^{لو_هـ ا}]^س = هـ^{س لو_هـ ا}

∴ $\frac{ء}{ء س}(ا^{س}) = \frac{ء}{ء س}(هـ^{س لو_{هـ} ا}) = هـ^{س لو_{هـ} ا} \times لو_{هـ} ا = ا^{س} \times لو_{هـ} ا$

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{ء(ا^{ع})}{ء س} = \frac{ء(ا^{ع})}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$ «قاعدة السلسلة» ∴ $\frac{ء(ا^{ع})}{ء س} = ا^{ع} لو_{هـ} ا \cdot \frac{ء ع}{ء س}$

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) $ص = س^{٣} + ٥ هـ^{س}$

(٢) $ص = س^{\frac{٢}{٣}} + هـ^{٩ - ٢س^{٣}}$

(٣) $ص = ٤^{س} + س^{٤}$

(٤) $ص = ط^{س} + س^{٣} هـ^{س}$

(٥) $ص = ٢^{٢س^{٣} + ٥س + ١}$

(٦) $ص = (٣س - ١) هـ^{ط^{س}}$

(٧) $ص = \frac{هـ^{س}}{س^{٢} + ٢}$

(٨) $ص = (هـ^{٤س} - هـ^{-٤س})^{٧}$

(٩) $ص = هـ^{٣} + (\pi)^{ق^{س}}$

(١٠) $ص = هـ^{ط^{س}} \times ٣^{-٢س}$

الحل

(١) $\because ص = س^{٣} + ٥ هـ^{س}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ٣س^{٢} + ٥ هـ^{س}$

(٢) $\because ص = س^{\frac{٢}{٣}} + هـ^{٩ - ٢س^{٣}}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} + هـ^{٩ - ٢س^{٣}} \times (-٦س^{٢})$

(٣) $\because ص = ٤^{س} + س^{٤}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ٤^{س} \text{ لو}_{هـ} ٤ + ٤س^{٣}$

(٤) $\because ص = ط^{س} + س^{٣} هـ^{س}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ق^{٢} س + س^{٣} هـ^{س} + هـ^{س} \times ٣س^{٢}$

(٥) $\because ص = ٢^{٢س^{٣} + ٥س + ١}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ٢^{٢س^{٣} + ٥س + ١} \times (٦س^{٢} + ٥) \text{ لو}_{هـ} ٢$

(٦) $\because ص = (٣س - ١) هـ^{ط^{س}}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = (٣س - ١) \times هـ^{ط^{س}} \times ق^{٢} س + ٣ هـ^{ط^{س}}$

$= هـ^{ط^{س}} [(٣س - ١) ق^{٢} س + ٣]$

(٧) $\because ص = \frac{هـ^{س}}{س^{٢} + ٢}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{(س^{٢} + ٢) \times هـ^{س} - هـ^{س} (٢س)}{(س^{٢} + ٢)^{٢}} = \frac{هـ^{س} (س^{٢} - ٢س + ٢)}{(س^{٢} + ٢)^{٢}}$

⑧ ∵ ص = $(هـ^{٤س} - هـ^{-٤س})^{٧}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ٧ (هـ^{٤س} - هـ^{-٤س})^{٦} \times [٤ هـ^{٤س} + ٤ هـ^{-٤س}]$

$= ٢٨ (هـ^{٤س} + هـ^{-٤س}) (هـ^{٤س} - هـ^{-٤س})^{٦}$

⑨ ∵ ص = $هـ^{٣} + (\pi)^{ظاس}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = صفر + $(\pi)^{ظاس} \times$ لو$_{هـ}$ $(\pi) \times$ قا^{٢}س ظاس

$= \pi^{ظاس} \times$ قا^{٢}س ظاس لو$_{هـ}$ (π)

لاحظ أن

∵ $هـ^{٣}$ = مقدار ثابت

∴ اشتقاقه = صفر

⑩ ∵ ص = $هـ^{جتاس} \times ٣^{-٢س}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = هـ^{جتاس} \times ٣^{-٢س}$ لو$_{هـ}$ $٣ \times (-٢) + ٣^{-٢س} هـ^{جتاس} \times -$ جاس

$= هـ^{جتاس} \times ٣^{-٢س} [-٢$ لو$_{هـ}$ $٣ -$ جاس$]$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية

① إذا كانت : د $(س) =$ لو$_{هـ}$ س فإن : دَ $(س) = \frac{١}{س}$

② إذا كانت : د $(س) =$ لو$_{م}$ س فإن : دَ $(س) = \frac{١}{س \text{ لو}_{هـ} ٢} = \frac{١}{س}$ لو$_{م}$ هـ

وبصفة عامة : إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

* $\frac{ء (\text{لو}_{هـ} ع)}{ء س} = \frac{١}{ع} \cdot \frac{ء ع}{ء س}$

* $\frac{ء (\text{لو}_{م} ع)}{ء س} = \frac{١}{ع \text{ لو}_{هـ} ٢} \cdot \frac{ء ع}{ء س} = \frac{١}{ع}$ لو$_{م}$ هـ $\cdot \frac{ء ع}{ء س}$

الإثبات

① ∵ ص = لو$_{هـ}$ س ∴ س = $هـ^{ص}$ (بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س)

∴ $١ = هـ^{ص} \frac{ء ص}{ء س}$ ∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{هـ^{ص}} = \frac{١}{س}$

أى أن : $\frac{ء}{ء س}$ (لو$_{هـ}$ س) $= \frac{١}{س}$

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{د (لو_{هـ} ع)}{د س} = \frac{د (لو_{هـ} ع)}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ «قاعدة السلسلة»

$\therefore \frac{د (لو_{هـ} ع)}{د س} = \frac{١}{ع} \cdot \frac{د ع}{د س}$

② $\frac{د}{د س} (لو_{م} س) = \frac{د}{د س} \left(\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} م} \right) = \frac{١}{لو_{هـ} م} \frac{د}{د س} (لو_{هـ} س) = \frac{١}{س} \cdot \frac{١}{لو_{هـ} م}$

، $\because \frac{١}{لو_{هـ} م} = لو_{م} هـ$ $\therefore \frac{د}{د س} (لو_{م} س) = \frac{١}{س} لو_{م} هـ$

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{د (لو_{م} ع)}{د س} = \frac{د (لو_{م} ع)}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س} = \frac{١}{ع لو_{هـ} م} \cdot \frac{د ع}{د س}$

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① ص = ٤ س + ٩ لو$_{هـ}$ س

② ص = لو$_{٤}$ س

③ ص = لو$_{هـ}$ (٣ س^{٤} + ٨)

④ ص = لو (٤ س^{٢} − ١)^{٣}

⑤ ص = س^{٤} لو$_{هـ}$ س^{٣}

⑥ ص = ٢ س + هـ^{س} لو$_{هـ}$ س

⑦ ص = لو$_{هـ}$ $\frac{س^{٣}}{س + ٤}$

⑧ ص = $\frac{١ + لو_{هـ} س}{١ - لو_{هـ} س}$

الحل

① $\because$ ص = ٤ س + ٩ لو$_{هـ}$ س $\therefore \frac{د ص}{د س} = ٤ + ٩ \times \frac{١}{س} = ٤ + \frac{٩}{س}$

② $\because$ ص = لو$_{٤}$ س $\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{س لو_{هـ} ٤} = \frac{١}{س} لو_{٤} هـ$

③ $\because$ ص = لو$_{هـ}$ (٣ س^{٤} + ٨) $\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{(٣ س^{٤} + ٨)} \times (١٢ س^{٣}) = \frac{١٢ س^{٣}}{٣ س^{٤} + ٨}$

④ $\because$ ص = لو (٤ س^{٢} − ١)^{٣} = ٣ لو (٤ س^{٢} − ١)

$\therefore \frac{د ص}{د س} = ٣ \times \frac{٨ س}{(٤ س^{٢} - ١) لو_{هـ} ١٠} = \frac{٢٤ س}{(٤ س^{٢} - ١) لو_{هـ} ١٠}$

⑤ ∵ ص = س^{٤} لو$_{هـ}$ س^{٣}

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = س^{٤} × $\frac{١}{س^{٣}}$ × ٣ س^{٢} + (لو$_{هـ}$ س^{٣}) × ٤ س^{٣}

= ٣ س^{٣} + ٤ س^{٣} لو$_{هـ}$ س^{٣}

= س^{٣} (٣ + ٤ لو$_{هـ}$ س^{٣})

⑥ ∵ ص = ٢ س + هـ^{س} لو$_{هـ}$ س

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ + هـ^{س} × $\frac{١}{س}$ + (لو$_{هـ}$ س) × هـ^{س}

= ٢ + هـ^{س} ($\frac{١}{س}$ + لو$_{هـ}$ س)

⑦ ∵ ص = لو$_{هـ}$ $\frac{س^{٣}}{س + ٤}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{\left(\frac{س^{٣}}{س + ٤}\right)}$ × $\frac{(س + ٤) \times ٣ س^{٢} - س^{٣} (١)}{(س + ٤)^{٢}}$ = $\frac{٣ س^{٣} + ١٢ س^{٢} - س^{٣}}{س^{٣} (س + ٤)}$

= $\frac{٢ س^{٣} + ١٢ س^{٢}}{س^{٣} (س + ٤)}$ = $\frac{٢ س^{٢} (س + ٦)}{س^{٣} (س + ٤)}$ = $\frac{٢ (س + ٦)}{س (س + ٤)}$

حل آخر :

∵ ص = لو$_{هـ}$ $\frac{س^{٣}}{س + ٤}$

∴ ص = لو$_{هـ}$ س^{٣} − لو$_{هـ}$ (س + ٤) (باستخدام قوانين اللوغاريتمات)

∴ ص = ٣ لو$_{هـ}$ س − لو$_{هـ}$ (س + ٤)

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{٣}{س}$ − $\frac{١}{س + ٤}$ = $\frac{٣ س + ١٢ - س}{س (س + ٤)}$ = $\frac{٢ س + ١٢}{س (س + ٤)}$ = $\frac{٢ (س + ٦)}{س (س + ٤)}$

⑧ ∵ ص = $\frac{١ + لو_{هـ} س}{١ - لو_{هـ} س}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{(١ - لو_{هـ} س) \times \frac{١}{س} - (١ + لو_{هـ} س) \times \frac{-١}{س}}{(١ - لو_{هـ} س)^{٢}}$ = $\frac{٢}{س (١ - لو_{هـ} س)^{٢}}$

ملاحظات

① ميل المماس للمنحنى ص = هـ^س عند أى نقطة عليه هو نفسه قيمة الإحداثى الصادى لهذه النقطة.

② ميل المماس للمنحنى : ص = لو_هـ س عند أى نقطة عليه هو مقلوب قيمة الإحداثى السينى لهذه النقطة.

③ ∵ لو_هـ |س| = { لو_هـ س ، س > ٠ ; لو_هـ (−س) ، س < ٠ }

* عندما س > ٠ فإن : $\frac{د}{د س}$ [لو_هـ س] = $\frac{١}{س}$

* عندما س < ٠ فإن : $\frac{د}{د س}$ [لو_هـ (−س)] = $\frac{١}{-س}$ × −١ = $\frac{١}{س}$

أى أن : $\frac{د}{د س}$ [لو_هـ |س|] = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠

وبصفة عامة إذا كانت ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{د}{د س}$ [لو_هـ |ع|] = $\frac{د}{د ع}$ [لو_هـ |ع|] × $\frac{د ع}{د س}$ «قاعدة السلسلة»

= $\frac{١}{ع}$ × عَ = $\frac{عَ}{ع}$

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

① ص = لو_هـ |س^٢ − ١|

② ص = لو |جا س|

الحل

① ∵ ص = لو_هـ |س^٢ − ١|

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{س^٢ - ١}$ × ٢ س = $\frac{٢ س}{س^٢ - ١}$

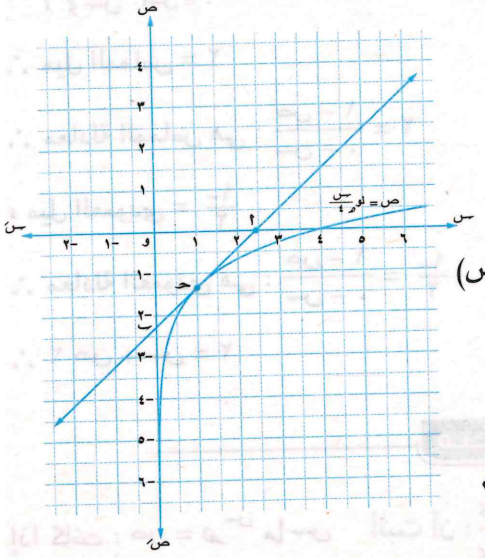
② ∵ ص = لو |جا س|

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{(جا س) \times لو_{هـ} ١٠}$ × جتا س = $\frac{ظا س}{لو_{هـ} ١٠}$ = ظا س × لو هـ

مثال ٤

إذا كان $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للمنحنى : ص = لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٤}$ فى النقطة (١ ، ص) وتقطع محور السينات فى النقطة أ ، ومحور الصادات فى النقطة ب أوجد طول : $\overline{أ ب}$

الحل



$\because$ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٤}{س} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{س}$

$\therefore$ ميل المماس عند النقطة حـ (١ ، ص)

$= \left(\frac{ء ص}{ء س} \right)_{س = ١} = ١$

، $\because$ $\overleftrightarrow{أ ب}$ يمس المنحنى فى النقطة حـ (١ ، ص)

$\therefore$ ص = لو$_{هـ}$ $\frac{١}{٤}$ = − لو$_{هـ}$ ٤

$\therefore$ حـ = (١ ، − لو$_{هـ}$ ٤)

$\therefore$ معادلة المماس $\overleftrightarrow{أ ب}$ هى : $\frac{ص + لو_{هـ} ٤}{س - ١} = ١$

أى : ص + لو$_{هـ}$ ٤ = س − ١

لإيجاد نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ مع محور السينات نضع ص = ٠

$\therefore$ س = ١ + لو$_{هـ}$ ٤ $\quad\quad$ $\therefore$ أ = (١ + لو$_{هـ}$ ٤ ، ٠)

$\therefore$ لإيجاد نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ مع محور الصادات نضع س = ٠

$\therefore$ ص = − ١ − لو$_{هـ}$ ٤ $\quad\quad$ $\therefore$ ب = (٠ ، − ١ − لو$_{هـ}$ ٤)

$\therefore$ أ ب = $\sqrt{(١ + لو_{هـ} ٤)^{٢} + (١ + لو_{هـ} ٤)^{٢}} = \sqrt{٢}$ (١ + لو$_{هـ}$ ٤)

مثال ٥

أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى : ص = هـ$^{٢ س}$ جتا س عند س = ٠

الحـل

عند س = ٠ ∴ ص = هـ^صفر جتا صفر = ١

∴ النقطة (٠ ، ١) ، ∵ $\frac{ء ص}{ء س}$ = هـ^٢س × – جا س + جتا س × هـ^٢س × ٢

∴ $\left(\frac{ء ص}{ء س}\right)_{س = ٠}$ = ١ × صفر + ١ × ١ × ٢ = ٢

∴ ميل المماس = ٢

∴ معادلة المماس هى : $\frac{ص - ١}{س - ٠}$ = ٢ ∴ ص – ٢ س = ١

، ميل العمودى = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة العمودى هى : $\frac{ص - ١}{س - ٠}$ = $\frac{-١}{٢}$

∴ ٢ ص + س = ٢

مثـال ٦

إذا كانت : ص = هـ^س جا س أثبت أن : $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ – ٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٢ ص = ٠

الحـل

∵ ص = هـ^س جا س

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = هـ^س جتا س + جا س × هـ^س = هـ^س (جا س + جتا س)

، $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = هـ^س (جتا س – جا س) + (جا س + جتا س) × هـ^س = هـ^س (٢ جتا س)

∴ $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ – ٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٢ ص

= هـ^س × ٢ جتا س – ٢ × هـ^س (جا س + جتا س) + ٢ × هـ^س جا س

= ٢ جتا س × هـ^س – ٢ جا س × هـ^س – ٢ جتا س × هـ^س + ٢ جا س × هـ^س

= صفر

مثال ٧

إذا كانت : $س = لو_{هـ} ن$ ، $ص = جتا ن$ أوجد : $\frac{ء ص}{ء س}$ ، $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$

الحل

$\because س = لو_{هـ} ن$ $\therefore \frac{ء س}{ء ن} = \frac{١}{ن}$

، $ص = جتا ن$ $\therefore \frac{ء ص}{ء ن} = -جا ن$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{\frac{ء ص}{ء ن}}{\frac{ء س}{ء ن}} = \frac{-جا ن}{\frac{١}{ن}} = -ن جا ن$

، $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = \frac{ء}{ء س}\left(\frac{ء ص}{ء س}\right) = \frac{ء}{ء ن}[-ن جا ن] \times \frac{ء ن}{ء س}$

$= (-ن جا ن - جا ن) \times ن$

$= -ن^{٢} جا ن - ن جا ن$

الاشتقاق اللوغاريتمى

يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرات (فى حالة وجود دالة أس دالة) بصورة لوغاريتمية بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفيها واستخدام خواص اللوغاريتمات فى تبسيط العلاقة قبل إجراء عملية الاشتقاق.

مثال ٨

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى :

(١) $ص = س^{س}$

(٢) $ص = (جا س)^{س}$

(٣) $ص = س^{جا س}$

(٤) $س^{ص} = هـ^{ص - س}$

الحل

(١) $\because ص = س^{س}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين

$\therefore لو_{هـ} ص = لو_{هـ} س^{س}$

∴ لو$_{هـ}$ ص = س لو$_{هـ}$ س باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{١}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س}$ = س × $\frac{١}{س}$ + لو$_{هـ}$ س

∴ $\frac{١}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س}$ = ١ + لو$_{هـ}$ س بالضرب × (ص = س^{س})

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ص (١ + لو$_{هـ}$ س) = س^{س} (١ + لو$_{هـ}$ س)

② ∵ ص = (ق$_{١}$ س)^{س} بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين

∴ لو$_{هـ}$ ص = لو$_{هـ}$ (ق$_{١}$ س)^{س}

∴ لو$_{هـ}$ ص = س لو$_{هـ}$ (ق$_{١}$ س) باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{١}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س}$ = س × $\frac{١}{ق_{١} س}$ × ق$_{١}$ س طا س + لو$_{هـ}$ (ق$_{١}$ س)

∴ $\frac{١}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س}$ = س طا س + لو$_{هـ}$ (ق$_{١}$ س) بالضرب × (ص = (ق$_{١}$ س)^{س})

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ص [س طا س + لو$_{هـ}$ (ق$_{١}$ س)] = (ق$_{١}$ س)^{س} [س طا س + لو$_{هـ}$ (ق$_{١}$ س)]

③ ∵ ص = س$^{جا س}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين

∴ لو$_{هـ}$ ص = لو$_{هـ}$ س$^{جا س}$

∴ لو$_{هـ}$ ص = جا س لو$_{هـ}$ س باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{١}{ص} \times \frac{ء ص}{ء س}$ = جا س × $\frac{١}{س}$ + لو$_{هـ}$ س × جتا س بالضرب × (ص = س$^{جا س}$)

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ص [$\frac{جا س}{س}$ + جتا س لو$_{هـ}$ س]

= س$^{جا س}$ [$\frac{جا س}{س}$ + جتا س لو$_{هـ}$ س]

④ ∵ س^{ص} = هـ$^{ص - س}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين

∴ لو$_{هـ}$ س^{ص} = لو$_{هـ}$ هـ$^{ص - س}$

∴ ص لو$_{هـ}$ س = (ص − س) لو$_{هـ}$ هـ ∴ ص لو$_{هـ}$ س = ص − س

∴ س = ص − ص لو$_{هـ}$ س ∴ س = ص (١ − لو$_{هـ}$ س)

∴ ص = $\frac{\text{س}}{\text{١ − لو}_{هـ}\text{ س}}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{(\text{١ − لو}_{هـ}\text{ س}) \times \text{١} - \text{س} \left(-\frac{\text{١}}{\text{س}}\right)}{(\text{١ − لو}_{هـ}\text{ س})^{\text{٢}}} = \frac{\text{١ − لو}_{هـ}\text{ س} + \text{١}}{(\text{١ − لو}_{هـ}\text{ س})^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢ − لو}_{هـ}\text{ س}}{(\text{١ − لو}_{هـ}\text{ س})^{\text{٢}}}$

مثال ٩

إذا كانت : ص = $هـ^{\text{س}} \sqrt{\frac{\text{١ − س}}{\text{١ + س}}}$ حيث −١ < س < ١

أثبت أن : (١ − س^{٢}) صَ + س^{٢} ص = ٠

الحل

∴ ص = $هـ^{\text{س}} \sqrt{\frac{\text{١ − س}}{\text{١ + س}}}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين

∴ لو$_{هـ}$ ص = لو$_{هـ}$ $\left[هـ^{\text{س}} \sqrt{\frac{\text{١ − س}}{\text{١ + س}}}\right]$

∴ لو$_{هـ}$ ص = لو$_{هـ}$ $هـ^{\text{س}}$ + لو$_{هـ}$ $\left(\frac{\text{١ − س}}{\text{١ + س}}\right)^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$

∴ لو$_{هـ}$ ص = س + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ لو$_{هـ}$ $\left(\frac{\text{١ − س}}{\text{١ + س}}\right)$

∴ لو$_{هـ}$ ص = س + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ [لو$_{هـ}$ (١ − س) − لو$_{هـ}$ (١ + س)] (باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{\text{١}}{\text{ص}} \times$ صَ = ١ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ $\left[\frac{\text{١}}{\text{١ − س}} - \frac{\text{−١}}{\text{١ + س}}\right]$

∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = ١ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ $\left[\frac{\text{−١ − س − ١ + س}}{(\text{١ − س})(\text{١ + س})}\right]$ ∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = ١ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ $\left[\frac{\text{٢−}}{\text{١ − س}^{\text{٢}}}\right]$

∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = ١ − $\frac{\text{١}}{\text{١ − س}^{\text{٢}}}$ ∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = \frac{\text{١ − س}^{\text{٢}} - \text{١}}{\text{١ − س}^{\text{٢}}}$

∴ $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = \frac{\text{− س}^{\text{٢}}}{\text{١ − س}^{\text{٢}}}$ ∴ (١ − س^{٢}) صَ = − س^{٢} ص

∴ (١ − س^{٢}) صَ + س^{٢} ص = ٠

تذكر أن :

* لو$_{هـ}$ (أ × ب) = لو$_{هـ}$ أ + لو$_{هـ}$ ب
* لو$_{هـ}$ هـ = ١

حل آخر :

$\therefore$ ص $= هـ_{س} \left| \frac{١ - س}{١ + س} \right|$ (باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س)

$\therefore$ صَ $= هـ_{س} \times \frac{١}{\left| \frac{١ - س}{١ + س} \right|^{٢}} \times \frac{(١ + س)(-١) - (١ - س)(١)}{(١ + س)^{٢}} + \left| \frac{١ - س}{١ + س} \right| \times هـ_{س}$

$= هـ_{س} \times \frac{١}{\left| \frac{١ - س}{١ + س} \right|^{٢}} \times \frac{-١ - س - ١ + س}{(١ + س)^{٢}} + \left| \frac{١ - س}{١ + س} \right| \times هـ_{س}$

$= هـ_{س} \times \frac{-١}{\left| \frac{١ - س}{١ + س} \right|^{٢} (١ + س)^{٢}} + \left| \frac{١ - س}{١ + س} \right| \times هـ_{س}$

$= هـ_{س} \times \left| \frac{١ - س}{١ + س} \right| \left[\frac{-١}{(١ + س)(١ - س)} + ١ \right]$

$= هـ_{س} \times \left| \frac{١ - س}{١ + س} \right| \times \left[\frac{-١}{١ - س^{٢}} + ١ \right]$

$\therefore$ صَ $= ص \times \left[\frac{-٢س}{١ - س^{٢}} \right]$ $\therefore$ صَ $= \frac{-ص\, س^{٢}}{(١ - س^{٢})}$

$\therefore (١ - س^{٢})$ صَ $+ س^{٢}$ ص $= ٠$

تمارين

7

على مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) $ص = هـ^{٣س}$

(٢) $ص = ٧ هـ^{س+٤}$

(٣) $ص = هـ^{٢س+٣}$

(٤) $ص = \frac{١}{٢} هـ^{٣-٦س-س^{٢}}$

(٥) $ص = هـ^{٣س^{٥}}$

(٦) $ص = هـ^{س^{٢}-س}$

(٧) $ص = \frac{١}{٣} هـ^{س} - ٥ هـ$

(٨) $ص = هـ^{(س+١)^{٢}}$

(٩) $ص = س^{٢} هـ^{-٣}$

(١٠) $ص = س^{٢} + ٣ هـ^{س}$

(١١) $ص = ٢ هـ^{س} + جتا ٢س$

(١٢) $ص = ٢س + هـ^{٦س}$

(١٣) $ص = س^{٣} + ظا س + هـ^{٥س+١}$

(١٤) $ص = هـ^{٥} + هـ^{٥س} + هـ^{٥س^{٢}}$

٢ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل مما يأتى :

(١) $ص = ٣^{س}$

(٢) $ص = (\frac{١}{٢})^{س}$

(٣) $ص = ٥ \times ٦^{س}$

(٤) $ص = ٥^{س^{٣}+٢س}$

(٥) $ص = ٧^{س} + س^{٧}$

(٦) $ص = ٣(٣س^{٢} - ٥س + ٢)$

(٧) $ص = ٣ هـ^{ظا س}$

(٨) $ص = هـ^{جتا س}$

(٩) $ص = هـ^{\sqrt{٢س}}$

(١٠) $ص = (٣س - ١)^{-٢}$

(١١) $ص = هـ^{جا \sqrt{٢س}}$

(١٢) $ص = هـ^{ظا \sqrt{٢س}}$

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) $ص = س هـ^{٢س}$

(٢) $ص = س^{٢} هـ^{س}$

(٣) $ص = (س^{٢} + ٣) هـ^{-٣س}$

(٤) $ص = ٢ س^{٤} هـ^{١+س}$

(٥) $ص = (٣س - ٥) هـ^{س^{٢}}$

(٦) $ص = هـ^{س} جا س$

(٧) $ص = هـ^{٢س} ظا ٣س$

(٨) $ص = هـ^{س} ظا س$

(٩) $ص = س \times ٥^{س}$

(١٠) $ص = (س^{٢} + \sqrt{٢س}) \times ٣^{س}$

(١١) $ص = ٢^{س} (س + ١)$

(١٢) $ص = \sqrt{٢س} هـ^{س}$

(١٣) ص = هـ^{جا س} × ٢^{-٥ س}

(١٤) ص = هـ^{ظا س} × ٥^{٧ س^٢}

(١٥) ص = هـ^{٢ س} ÷ ٣^{س^٢ - ٥}

(١٦) ص = هـ^{س} × جا^٢ س

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = $\frac{\text{س}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}}$

(٢) ص = $\frac{٢\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + ١}$

(٣) ص = $\frac{\text{هـ}^{\text{س}^٢}}{\text{س}}$

(٤) ص = $\frac{٢^{\text{س}}}{\text{س}}$

(٥) ص = $\frac{\text{هـ}^{٢\text{س} + ٣}}{\text{س}^٢ + ٣}$

(٦) ص = $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{ظا س}}$

(٧) ص = $\frac{\text{جا } ٣\text{ س}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

(٨) ص = $\frac{\text{هـ}^{\text{جا س}}}{\text{جتا س}}$

(٩) ص = $\frac{\text{هـ}^{-٢\text{س}}}{\sqrt{\text{س} + ١}}$

(١٠) ص = $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}$

(١١) ص = $\frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١ + \text{جتا س}}$

(١٢) ص = $\frac{٣^{\text{س}}}{٣^{\text{س}} + ١}$

(١٣) ص = (هـ^{٣ س} - هـ^{-٢ س})^٥

(١٤) ص = (هـ^{٢ س} + هـ^{-٢ س})^٣

٥ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل مما يأتى :

(١) ص = ٥ لو_هـ س

(٢) ص = لو_هـ ٧ س

(٣) ص = ٣ لو_هـ (س + ٤)

(٤) ص = لو_هـ (٢ س - ٧)

(٥) ص = ٣ س + لو_هـ س

(٦) ص = ٥ - ٣ لو_هـ س

(٧) ص = لو_هـ $\left(\frac{١}{٢}\text{ س}^٢ + \text{س}\right)$

(٨) ص = لو_هـ (٢ س^٣ + ٩)

(٩) ص = لو_هـ $\frac{١}{\text{س}^٢ + ٩}$

(١٠) ص = لو_٣ س

(١١) ص = لو_٥ (٣ س - ٢)

(١٢) ص = ٢ هـ^{٣ س} - ٥ لو_٢ $\frac{\text{س}}{٥}$

(١٣) ص = لو_هـ س^٢ - هـ^{$\frac{١}{٤}$ س}

(١٤) ص = لو (٢ س - ٣)^٢

(١٥) ص = ٣ جتا س - هـ^{س} - $\frac{١}{٢}$ لو_هـ س

(١٦) ص = ٣^{س} + ٣ لو_هـ س - ٢٠١٦

(١٧) ص = لو_هـ $\frac{\text{س}^٢}{\text{س} + ٧}$

(١٨) ص = لو $\left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}^٢}}{\text{س}^٢}\right)$

٦ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل مما يأتى :

(١) $ص = س \text{ لو}_{هـ} س$

(٢) $ص = س^{٢} \text{ لو}_{هـ} س$

(٣) $ص = س \text{ لو}_{هـ} س^{٢}$

(٤) $ص = (٢ س^{٥} - ٣) \text{ لو}_{هـ} س$

(٥) $ص = (٣ + س) \text{ لو}_{هـ} س$

(٦) $ص = ٢ س^{٢} \text{ لو}_{هـ} س^{٣}$

(٧) $ص = ٢ س + هـ^{س} \text{ لو}_{هـ} س$

(٨) $ص = هـ^{س} \text{ لو}_{هـ} (س^{٢} + ١)$

(٩) $ص = ٥ + ٤ \text{ جا} س \text{ لو}_{هـ} س$

(١٠) $ص = (\text{لو} س)^{٣} + \sqrt{س} \text{ لو} س^{٤}$

(١١) $ص = \frac{س}{\text{لو}_{هـ} س}$

(١٢) $ص = \frac{\text{لو}_{هـ} (٥ س)}{س + ١}$

(١٣) $ص = \frac{\text{لو}_{هـ} س}{\text{جا} س}$

(١٤) $ص = \frac{\text{لو}_{هـ} س}{\text{ظا} س}$

(١٥) $ص = \frac{هـ^{٣ س}}{\text{لو} س}$

(١٦) $ص = \frac{\text{لو} س}{١ + \text{لو} س}$

(١٧) $ص = \frac{(\text{لو}_{هـ} س) - ١}{(\text{لو}_{هـ} س) + ١}$

(١٨) $ص = \frac{١ - ٢ \text{ لو}_{هـ} س}{\text{لو}_{هـ} س}$

٧ أوجد $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ لكل مما يأتى :

(١) $س = هـ^{٢ ن}$ ، $ص = ن^{٣}$

(٢) $س = هـ^{٢ ن}$ ، $ص = هـ^{٣ ن}$

(٣) $س = ٦ \text{ لو}_{هـ} ن$ ، $ص = ن^{٢}$

٨ أوجد $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ لكل مما يأتى :

(١) $ص = \text{لو}_{هـ} س$

(٢) $ص = س^{٣} + هـ^{٢ س}$

(٣) $ص = س \text{ لو} س$

٩ أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقط المعطاة :

(١) $ص = \sqrt{س} - ٢ هـ^{س}$ ، $س = \frac{١}{٤}$

(٢) $ص = س^{٢} - ٣ \text{ لو}_{هـ} س$ ، $س = ٢$

(٣) ص = $\frac{١}{٤}$ هـ^{٢س} − ٢ لو$_{هـ}$ س ، س = $\frac{١}{٢}$

(٤) ص = س هـ$^{-س}$ ، $\left(١ ، \frac{١}{هـ}\right)$

(٥) ص = (٢ س + ٣) هـ^{٢س} ، (٠ ، ٣)

(٦) ص = لو$_{٢}$ ٥ س ، س = ٢

(٧) ص = ٤ لو (٣ س + ١) ، س = ١

(٨) ص = لو$_{٢}$ (٢ س^{٢} − ٣)^{٤} ، س = ١

(٩) ص = ٣ (لو س)^{٢} ، س = ٣

١٠ أوجد قيم س التى يكون عندها مماس المنحنى يوازى محور السينات حيث س > ٠ :

(١) ص = س^{٣} لو$_{هـ}$ س

(٢) ص = $\frac{١}{س^{٢}}$ لو$_{هـ}$ س^{٢}

(٣) ص = س^{٣} − ٨١ لو$_{هـ}$ س

(٤) ص = ٣ − $\frac{س^{٢}}{٤}$ + لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٢}$

١١ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = س هـ^{٢س} عند النقطة $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢} هـ\right)$

١٢ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = هـ^{٢س} جتا س عند س = ٠

١٣ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = ٢^{س} + ٢$^{-س}$ عند النقطة $\left(٢ ، ٤\frac{١}{٤}\right)$

١٤ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = $\frac{هـ^{\frac{س}{٣}}}{س}$ عند النقطة $\left(٣ ، \frac{١}{٣} هـ\right)$

١٥ أوجد معادلة العمودى للمنحنى : ص = ٣ هـ^{س} عند نقطة واقعة عليه وإحداثيها السينى يساوى −١

١٦ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى :

ص = س^{٣} − ١٨ لو$_{هـ}$ س عند نقطة تقع عليه وإحداثيها السينى يساوى ٢

١٧ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = لو$_{هـ}$ $\left(٢ - \sqrt{٢}\ جتا س\right)$ عند النقطة التى تقع عليه وإحداثيها السينى يساوى $\frac{\pi}{٤}$

١٨ أوجد معادلة العمودى للمنحنى : $س = هـ^{ن}$ ، $ص = هـ^{ن} + هـ^{٢ن}$ عند $س = ١$

١٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $د(س) = هـ^{٣س}$ فإن : $د'(س)$ تساوى

(أ) $هـ^{٢س}$ (ب) $٣هـ^{٣س}$ (جـ) $٩هـ^{٣س}$ (د) $٣هـ^{٢س}$

(٢) إذا كان : $د(س) = ٢^{س}$ فإن : $د'(-٢)$ تساوى

(أ) $-د(٢)$ (ب) $-د'(٢)$ (جـ) $-د(-٢)$ (د) $د(-٢)$

(٣) إذا كانت : $د(س) = س^{٢} - ٣ لو_{هـ} ٥ س$ فإن : $د'(٢)$ تساوى

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) ٦

(٤) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث $د(س) = هـ^{٢س+١}$ عند النقطة $(\frac{-١}{٢} ، ١)$ هى :

(أ) $٢ص = س + ١$ (ب) $ص = ٢س + ٢$

(جـ) $ص = ٢س - ٣$ (د) $٢ص = ٣س + ١$

(٥) إذا كان : $ص = \frac{١}{س} لو_{هـ} س$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $هـ^{س}$ (جـ) صفر (د) $لو_{هـ} س$

(٦) إذا كان : $ص = س^{٢} لو_{هـ} س$ فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) $٣س^{٢}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) $لو_{هـ} س^{٣}$ (د) صفر

(٧) النسبة بين ميل مماس المنحنى : $ص = لو_{هـ} ٣\sqrt{س + ١}$ وميل مماس المنحنى $ص = لو_{هـ} ٥\sqrt{س + ١}$ عند $س = ٣$ كنسبة

(أ) $٣ : ٥$ (ب) $٥ : ٣$ (جـ) $١ : ١$ (د) $لو_{هـ} ٣ : لو_{هـ} ٥$

(٨) إذا كان : $ص = لو_{هـ} س$ ، $ن$ عدد صحيح موجب فإن : $\frac{ء^{ن}(ص)}{ء س^{ن}}$ = ...

(أ) $(\frac{-هـ}{س})^{ن}$ (ب) $(ن - ١) س^{-ن}$

(جـ) $(ن - ١) س^{-ن}$ (د) $(-١)^{ن-١} \underline{|ن - ١|} س^{-ن}$

(٩) إذا كان العمودى على المنحنى ص = س لو$_{هـ}$ س موازى للمستقيم

٢ س − ٢ ص + ٣ = ٠ فإن معادلة هذا العمودى هى

(أ) س − ص = ٣ هـ$^{-٢}$ (ب) س − ص = ٦ هـ$^{-٢}$

(جـ) س − ص = ٣ هـ^{٢} (د) س − ص = ٦ هـ^{٢}

(١٠) المماس للمنحنى س = هـ$^{\theta}$ جتا θ ، ص = هـ$^{\theta}$ جا θ عند النقطة التى عندها

θ = $\frac{\pi}{٤}$ يعمل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(١١) ميل المماس للمنحنى ص = لو$_{هـ}$ ظا ن + لو$_{هـ}$ جتا ن ، س = لو$_{هـ}$ جا ن + لو$_{هـ}$ ظتا ن

عند ن = $\frac{\pi}{٤}$ تساوى

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(١٢) قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى ص = هـ$^{ظا\ س}$ جا س

عند س = π تساوى

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi\ ٣}{٤}$

٢٠ إذا كانت : هـ^{س} = $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{س^{ن}}{ن!}$ أثبت أن : $\frac{ء}{ء\ س}$ (هـ^{س}) = هـ^{س}

٢١ إذا كانت : ص = س^{٢} لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٤}$ فأوجد : $\frac{ء^{٣}\ ص}{ء\ س^{٣}}$ عند س = ٤ «$\frac{١}{٢}$»

٢٢ إذا كانت : ص = لو$_{هـ}$ (١ + هـ^{س}) أوجد قيم س التى تجعل : هـ^{ص} $\frac{ء\ ص}{ء\ س}$ = ٦ «لو$_{هـ}$ ٦»

٢٣ إذا كانت : س = ص^{٢} هـ$^{\sqrt{ص}}$ أوجد : $\frac{ء\ س}{ء\ ص}$

٢٤ إذا كانت : س = ص^{٢} لو$_{هـ}$ ص ، ص > ٠ أوجد : $\frac{ء\ ص}{ء\ س}$

٢٥ إذا كان : ص = لو$_{هـ}$ (ظا س − ظتا س) أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = قتا س

٢٦ إذا كان : ص = لو$_{هـ}$ $\left(\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٢}\right)\right)$ أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = قا س

٢٧ إذا كان : ص = لو$_{هـ}$ (ظا س) أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ قتا ٢ س

٢٨ إذا كان : ص = لو$_{هـ}$ $\left(\sqrt{\text{قا س}}\right)$ أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٢}$ ظا س

٢٩ إذا كانت : ص = لو$_{هـ}$ $\left(س + \sqrt{س^{٢} + ٤}\right)$ أثبت أن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} + ٤}}$

٣٠ إذا كانت : ص = $هـ^{٢ س}$ جا ٢ س أثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٨ ص ظتا ٢ س

٣١ إذا كانت : ص = $هـ^{٣ س} + س^{٢}$ أثبت أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} - ٢ = ٩ (ص - س^{٢})$

٣٢ إذا كانت : ص = ٤ $هـ^{س^{٢} + ١}$ أثبت أن : $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}} = ٤ س ص (٣ + ٢ س^{٢})$

٣٣ إذا كانت : ص = ٤ $هـ^{\frac{س}{٢}}$ أثبت أن : س ص ص$_{٣}$ + ٢ ص ص$_{١}$ − س ص$_{٢}^{٢}$ = ٠

٣٤ إذا كانت : ص = $\sqrt{\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}}$ أثبت أن : (س^{٤} − ١) ص$_{٢}$ + ٢ س ص = ٠

٣٥ إذا كانت : ص = $هـ^{-س}\sqrt{\frac{١ + س}{١ - س}}$ حيث −١ < س < ١

أثبت أن : (١ − س^{٢}) ص$_{٢}$ = س^{٢} ص

٣٦ أوجد معدل تغير لو$_{هـ}$ (٩ + س^{٣}) بالنسبة إلى س^{٢} + ٣ عند س = ١ « $\frac{٣}{٢٠}$ »

٣٧ إذا كانت : ص = $هـ^{أ س}$

① أثبت أن : $\frac{ء^{٤} ص}{ء س^{٤}}$ − أ^{٤} ص = ٠

② أوجد قيم أ التى تحقق أن : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ − ٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ + ص = ٠ «١»

٣٨ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى :

(١) ص = قا هـ^{س}

(٢) ص هـ^{س} = هـ^{٣}

(٣) س لو$_{هـ}$ ص = ٥٨

(٤) ص = لو$_{هـ}$ |س^{٣} − ٧ س^{٢} − ٣|

(٥) ص = ٢قا^{٢} س

(٦) ص = لو |ظا س|

(٧) ص = جا (لو س)

(٨) ص = لو (جتا ٥ س)

(٩) ص = هـ$^{جا س}$ × جا هـ^{س}

(١٠) ص = $\frac{١}{هـ^{س} ظا س}$

(١١) ص = $\sqrt{\frac{١ + هـ^{س}}{١ - هـ^{س}}}$

(١٢) ص = لو$_{هـ}$ لو$_{هـ}$ س

(١٣) ص = لو$_{هـ}$ لو$_{هـ}$ لو$_{هـ}$ س

(١٤) ص = لو$_{هـ}$ (١ + هـ$^{٣ س}$)

(١٥) ص = لو$_{هـ}$ (هـ$^{٣ س}$ + هـ$^{- ٣ س}$)

(١٦) ص = لو $\sqrt{س}$

(١٧) ص = $\sqrt{\text{لو س}}$

(١٨) ص = [س + لو$_{هـ}$ (٢ س)]^{٣}

(١٩) ص = لو$_{هـ}$ (جا (هـ^{س} + ٥ س + ٨))

(٢٠) ص = لو $\sqrt{\frac{س - ١}{س + ١}}$

(٢١) ص = $\frac{هـ^{س} \text{ لو}_{هـ} س}{س^{٢}}$

(٢٢) ص = لو (جتا س^{٢})

(٢٣) ص = جتا (لو س)^{٢}

(٢٤) ص^{٢} = هـ$^{٥ س^{٢} - ٣}$

(٢٥) ص^{٢} = ٣^{س} × ٢^{ص}

(٢٦) ص = ٢جتا س + لو$_{هـ}$ س

(٢٧) ص = ٤$^{٣ جا س}$ − هـ^{س}

(٢٨) ص = π$^{جا س}$ + هـ^{π}

(٢٩) ص = هـ$^{٣ س + ٢ \text{ لو}_{هـ} س}$

(٣٠) ص = لو$_{هـ}$ (قا س + ظا س)

(٣١) ص = لو$_{هـ}$ $\left(\frac{\text{لو}_{هـ} س}{س}\right)$

٣٩ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ فى كل مما يأتى :

(١) ص = س$^{٢ س}$

(٢) ص = (س^{٣} + ٥)^{س}

(٣) ص = ٣ س$^{س^{٢} + ٢}$

(٤) ص = س$^{\frac{١}{س}}$

(٥) ص = س$^{جا س}$

(٦) ص = (جا س)^{س}

(٧) ص = (١ − ٣ س)$^{\text{جتا س}}$

(٨) ص = (جا س)$^{\text{ظا س}}$

(٩) ص = س$^{\text{هـ س}}$

(١٠) ص = هـ$^{\text{س هـ}}$

(١١) ص = هـ$^{\text{هـ س}}$

(١٢) ص = (لو س)$^{\text{لو س}}$

(١٣) ص = (لو س)$^{\text{ظا س}}$

(١٤) ص = (س^{٢} + ٣)$^{\text{لو س}}$

(١٥) ص = (لو س)$^{\text{س}}$

(١٦) ص = س$^{\text{س س}}$

(٤٠) إذا كان $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للمنحنى : ص = لو$_{هـ}$ $\frac{س}{٢}$ فى النقطة حـ (١ ، ص) ويقطع محور السينات فى النقطة أ ، ومحور الصادات فى النقطة ب أوجد طول : $\overline{أ ب}$

« $\sqrt{٢}$ لو$_{هـ}$ ٢ هـ وحدة طول

(٤١) إذا كان العمودى للمنحنى : ص = لو$_{هـ}$ ٢ س عند النقطة أ (١ ، لو$_{هـ}$ ٢) يقطع محور السينات فى النقطة ب أوجد طول $\overline{أ ب}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. « ٠,٩٨٠ وحدة طول

(٤٢) إذا كان مماس المنحنى ص = هـ$^{\text{س}}$ عند النقطة (٢ ، هـ^{٢}) يقطع محور السينات فى النقطة أ ، ومحور الصادات فى النقطة ب ، أوجد طول : $\overline{أ ب}$ « ٧,٤٦ وحدة طول

(٤٣) إذا كان الإنتاج اليومى لأحد المصانع خلال فترة زمنية ن (يومًا) يتعين بالعلاقة ص = ٤٠٠ (١ − هـ$^{-٠,٣ ن}$) وحدة أوجد معدل التغير فى عدد الوحدات المنتجة بالنسبة للزمن فى اليوم العاشر. « ١٢٠ هـ$^{-٣}$

(٤٤) إذا كان إنتاج خلية نحل من العسل يُعطَى بالعلاقة :

ص = (ن + ١٠٠) لو$_{هـ}$ (ن + ٥) جرام بدلالة عدد الأيام ن أوجد معدل تغير إنتاج الخلية عند ن = ٥ ، ن = ١٥ ، ن = ٢٠

هل يتزايد إنتاج الخلية من العسل أم يتناقص ؟ « ١٢,٨ ، ٨,٧ ، ٨,٠٢ ، يتناقص

(٤٥) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معدل تغير هـ$^{\text{س}^{٣}}$ بالنسبة إلى لو$_{هـ}$ س يساوى

(أ) ٣ س^{٢} هـ$^{\text{س}^{٣}}$ + ٣ س^{٢} (ب) هـ$^{\text{س}^{٣}}$

(جـ) ٣ س^{٣} هـ$^{\text{س}^{٣}}$ (د) ٣ س^{٢} هـ$^{\text{س}^{٣}}$

(٢) المنحنى ص – هـ^{س ص} + س = ٠ له مماس رأسى عند النقطة

(أ) (١ ، ١) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (١ ، ٠) (د) (٢ ، هـ^٢)

(٣) إذا كان : د (س) = لو_هـ جا س – لو_هـ جتا س فإن : د' $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) ٢ (ب) –٢ (جـ) ١ (د) –١

(٤) إذا كان : د (س) = (جتا س)^{جتا س} فإن : د' (صفر) = ...

(أ) –٣ (ب) –٢ (جـ) –١ (د) صفر

(٥) إذا كان : د (س) = هـ^{ظا س} فإن : $\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{د(س) - د\left(\frac{\pi}{٤}\right)}{س - \frac{\pi}{٤}}$ = ...

(أ) هـ (ب) ٢ هـ (جـ) هـ^٢ (د) ٢ هـ^٢

(٦) إذا كان : ص = لو_هـ (جا س) فإن : $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = ...

(أ) – قتا^٢ س (ب) قا س

(جـ) – قتا س ظتا س (د) قا س ظا س

(٧) إذا كان : د (س) = هـ^{لو_هـ س} فإن : د' (س) = ...

(أ) (لو_هـ س) هـ^{لو_هـ س} (ب) هـ^{لو_هـ س}

(جـ) (لو_هـ س) هـ^{س – لو_هـ س} (د) ١

(٨) إذا كان : د (س) = هـ^{لو_هـ (س^٣ – ٢ س + ١)} فإن : د' (٠) = ...

(أ) –٤ (ب) –٢ (جـ) صفر (د) ٢

(٩) إذا كان : د (س) = س – س لو_هـ س فإن ميل المماس للمنحنى عند س = هـ يساوى

(أ) صفر (ب) –١ (جـ) ١ (د) هـ

(١٠) إذا كان : جا س = هـ^ص حيث ٠ < س < π فإن : $\frac{ء ص}{ء س}$ = ...

(أ) ظا س (ب) ظتا س (جـ) – ظا س (د) – ظتا س

(١١) إذا كان : ص = ٤ لو٢ ظا س + ٩ لو٣ جتا س فإن : $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ظا س + جتا س (د) -١

(١٢) إذا كان : ل ، م ∈ ح وكان د (س) = س هـ^س

وكان د(١٠) (س) = ل هـ^س + م س هـ^س فإن : ل + م = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

٤٦ إذا كان : هـ^س ص = س هـ^ص أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ « $\frac{ص - س ص}{س - س ص}$ »

٤٧ إذا كانت : هـ^(٢ س) لو هـ ص = س + ص - ٢ أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، ١) « $\frac{١}{هـ^٢ - ١}$ »

٤٨ إذا كانت : س هـ^(س ص) = ص + ظا^٢ س أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٠ « ١ »

٤٩ إذا كان : هـ^(س ص) - س^٢ + ص^٣ = صفر أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٠ « $\frac{١}{٣}$ »

٥٠ إذا كان : س هـ^(-$\frac{١}{٢}$ ص) + ص هـ^(-$\frac{س}{٢}$) = ٢ أوجد : $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٠ « $\frac{هـ - ١}{هـ}$ »

٥١ إذا كانت : س^٢ ص = أ ب لو هـ س أثبت أن : س^٢ ص'' + ٥ س ص' + ٤ ص = ٠

٥٢ إذا كان : ص لو هـ (س ص) = س أثبت أن : $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص (س - ص)}{س (س + ص)}$

٥٣ إذا كان : س = هـ^(جتا ٢ ن) ، ص = هـ^(ظا ٢ ن) أثبت أن : $\frac{د ص}{د س} = \frac{- ص لو هـ س}{س لو هـ ص}$

٥٤ إذا كان : س = أ جا^٢ θ ، ص = أ ظا^٣ θ أثبت أن : $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{٣ ظا θ}{٤ أ}$

٥٥ إذا كان : س = أ (جتا θ + لو هـ ظا $\frac{θ}{٢}$) ، ص = أ جا θ أثبت أن : $\left(\frac{د ص}{د س}\right)_{θ = \frac{π}{٤}}$ = ١

٥٦ إذا كان : س = أ هـ^θ (جا θ - جتا θ) ، ص = أ هـ^θ (جا θ + جتا θ)

أثبت أن : $\left(\frac{د ص}{د س}\right)_{θ = \frac{π}{٤}}$ = ١

٥٧ إذا كان : ص = أ جتا (لو هـ س) + ب جا (لو هـ س)

أثبت أن : س^{٢} $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + س $\frac{د ص}{د س}$ + ص = ٠

٥٨ إذا كانت : ص = س^{س} أثبت أن : ص$'$ = س^{س} (١ + لو هـ س)^{٢} + س$^{س - ١}$

للمتفوقين

٥٩ إذا كان : ص = $\frac{١}{٢}$ لو هـ $\left(\frac{١ - \text{جتا } ٢ س}{١ + \text{جتا } ٢ س}\right)$ أثبت أن : $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ ظا ٢ س

٦٠ إذا كان : ص = لو هـ $\frac{\sqrt{س^{٢} + ١} - ١}{\sqrt{س^{٢} + ١} + ١}$ أثبت أن : $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢}{س \sqrt{س^{٢} + ١}}$

٦١ إذا كان : ص = س$^{س^{س^{س}}}$... أثبت أن : س $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{ص^{٢}}{١ - ص \text{ لو}_{هـ} س}$

٦٢ إذا كان : ص = $\sqrt{\text{لو}_{هـ} س + \sqrt{\text{لو}_{هـ} س + \sqrt{\text{لو}_{هـ} س + ...}}}$

أثبت أن : (٢ ص − ١) $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{س}$

الدرس 3

تكامل يتضمن الدوال الأسية واللوغاريتمية

تكامل الدالة الأسية

* $\int هـ^{س} \, د س = هـ^{س} + ث$
* $\int هـ^{ل س + ا} \, د س = \frac{هـ^{ل س + ا}}{ل} + ث$ حيث : $ل \neq ٠$
* إذا كانت د (س) قابلة للاشتقاق فإن :
* $\int د'(س) \, هـ^{د(س)} \, د س = هـ^{د(س)} + ث$ حيث : ث ثابت أختيارى.

مثال ١

أوجد كل مما يأتى :

① $\int ٩ هـ^{س} \, د س$

② $\int هـ^{٦ س} \, د س$

③ $\int (٤ س^{٣} - ٤ هـ^{٨ س}) \, د س$

④ $\int (جا ٣ س + ٢ هـ^{-٤ س}) \, د س$

⑤ $\int (٣ هـ^{\frac{٥}{٤} ص} - ٨ هـ^{-٠,٢ ص}) \, د ص$

⑥ $\int (هـ^{ع} + هـ^{-ع})^{٢} \, د ع$

⑦ $\int \left(\frac{هـ^{س} + ٦}{هـ^{س}} \right) د س$

الحل

① $\int ٩ هـ^{س} \, د س = ٩ \int هـ^{س} \, د س = ٩ هـ^{س} + ث$

② $\int هـ^{٦ س} \, د س = \frac{هـ^{٦ س}}{٦} + ث$

③ $\int (٤ س^{٣} - ٤ هـ^{٨ س}) \, د س = س^{٤} - ٤ \times \frac{هـ^{٨ س}}{٨} + ث = س^{٤} - \frac{١}{٢} هـ^{٨ س} + ث$

④ $\int (جا ٣ س + ٢ هـ^{-٤ س}) \, د س = \frac{- جتا ٣ س}{٣} + ٢ \times \frac{هـ^{-٤ س}}{-٤} + ث$

$= -\frac{١}{٣} جتا ٣ س - \frac{١}{٢} هـ^{-٤ س} + ث$

⑤ $\int (٣ هـ^{\frac{٥}{٤} ص} - ٨ هـ^{-٠,٢ ص}) ء ص = \frac{٣ \times هـ^{\frac{٥}{٤} ص}}{\frac{٥}{٤}} - ٨ \times \frac{هـ^{-٠,٢ ص}}{-٠,٢} + ث$

$= \frac{١٢}{٥} هـ^{\frac{٥}{٤} ص} + ٤٠ هـ^{-٠,٢ ص} + ث$

⑥ $\int (هـ^{ع} + هـ^{-ع})^{٢} ء ع = \int (هـ^{٢ ع} + ٢ + هـ^{-٢ ع}) ء ع$

$= \frac{هـ^{٢ ع}}{٢} + ٢ ع + \frac{هـ^{-٢ ع}}{-٢} + ث$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٢ ع} + ٢ ع - \frac{١}{٢} هـ^{-٢ ع} + ث$

⑦ $\int \left(\frac{هـ^{س} + ٦}{هـ^{س}} \right) ء س = \int (١ + ٦ هـ^{-س}) ء س = س + \frac{٦ \times هـ^{-س}}{-١} + ث$

$= س - ٦ هـ^{-س} + ث$

مثـال ٢

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int س^{٣} هـ^{س^{٤}} ء س$

② $\int (س - ١) هـ^{٣ س^{٢} - ٦ س + ٥} ء س$

③ $\int جا س \times هـ^{جتا س} ء س$

④ $\int ظا^{٢} س \, هـ^{ظا س} ء س$

الحـل

① بوضع د (س) = $س^{٤}$ ∴ د′ (س) = $٤ س^{٣}$

∴ $\int س^{٣} هـ^{س^{٤}} ء س = \frac{١}{٤} \int (٤ س^{٣}) هـ^{س^{٤}} ء س = \frac{١}{٤} هـ^{س^{٤}} + ث$

② بوضع د (س) = $٣ س^{٢} - ٦ س + ٥$ ∴ د′ (س) = $٦ س - ٦ = ٦ (س - ١)$

∴ $\int (س - ١) هـ^{٣ س^{٢} - ٦ س + ٥} ء س = \frac{١}{٦} \int ٦ (س - ١) هـ^{٣ س^{٢} - ٦ س + ٥} ء س$

$= \frac{١}{٦} هـ^{٣ س^{٢} - ٦ س + ٥} + ث$

③ بوضع د (س) = جتا س

∴ دَ (س) = − جا س

∴ ∫ جا س × هـ^{جتا س} ءس = − ∫ (− جا س) × هـ^{جتا س} ءس = − هـ^{جتا س} + ث

④ بوضع د (س) = ظا س

∴ دَ (س) = قا^٢ س

∫ قا^٢ س هـ^{ظا س} ءس = هـ^{ظا س} + ث

معلومة إثرائية

∵ ا^س = هـ^{س لو_هـ ا}

∴ ∫ ا^س ءس = ∫ هـ^{س لو_هـ ا} ءس = هـ^{س لو_هـ ا} / لو_هـ ا + ث = ا^س / لو_هـ ا + ث

أى أن : ∫ ا^س ءس = ا^س / لو_هـ ا + ث

مثال ٣

أوجد كل مما يأتى :

① ∫ ٣^س ءس

② ∫ (س^٥ هـ + هـ^{٥س} + ٥^س) ءس

الحل

① ∫ ٣^س ءس = ٣^س / لو_هـ ٣ + ث

② ∫ (س^٥ هـ + هـ^{٥س} + ٥^س) ءس = س^{٥هـ + ١} / (٥هـ + ١) + هـ^{٥س} / ٥ + ٥^س / لو_هـ ٥ + ث

تكامل يتضمن الدالة اللوغاريتمية

∵ $\frac{د}{د س}$ [لو$_{هـ}$ |س|] = $\frac{١}{س}$ حيث : س ≠ ٠

∴ ∫ $\frac{١}{س}$ د س = لو$_{هـ}$ |س| + ث حيث : س ≠ ٠

وبصفة عامة إذا كانت د دالة قابلة للإشتقاق ، د (س) ≠ ٠ فإن :

∫ $\frac{د'(س)}{د(س)}$ د س = لو$_{هـ}$ |د (س)| + ث حيث : ث ثابت اختيارى

مثال ٤

أوجد كلًا مما يأتى :

① ∫ $\frac{٣}{س}$ د س

② ∫ $\frac{٩}{س \text{ لو}_{هـ} ٢}$ د س

③ ∫ $\frac{\text{لو}_{٤} هـ}{س}$ د س

④ ∫ $\frac{\text{لو}_{هـ} س^{٤}}{س \text{ لو}_{هـ} س^{٥}}$ د س

⑤ ∫ $\frac{(٤س - ١)^{٢}}{٢س}$ د س

⑥ ∫ $\left(\frac{٣هـ}{س} + \frac{س}{٣هـ}\right)$ د س

⑦ ∫ $\frac{٢٥ - س^{٢}}{٥س - س^{٢}}$ د س

⑧ ∫ $\frac{س + ٢}{٣ + ٤س + س^{٢}}$ د س

الحل

① ∫ $\frac{٣}{س}$ د س = ٣ ∫ $\frac{١}{س}$ د س = ٣ لو$_{هـ}$ |س| + ث

② ∫ $\frac{٩}{س \text{ لو}_{هـ} ٢}$ د س = $\frac{٩}{\text{لو}_{هـ} ٢}$ ∫ $\frac{١}{س}$ د س

= $\frac{٩}{\text{لو}_{هـ} ٢}$ × لو$_{هـ}$ |س| + ث

= ٩ لو$_{٢}$ |س| + ث

③ ∫ $\frac{\text{لو}_{٤} هـ}{س}$ د س = لو$_{٤}$ هـ ∫ $\frac{١}{س}$ د س

= لو$_{٤}$ هـ × لو$_{هـ}$ |س| + ث

= لو$_{٤}$ |س| + ث

تذكر أن :

$\frac{\text{لو}_{هـ} ا}{\text{لو}_{هـ} ب}$ = لو$_{ب}$ ا

لاحظ أن

لو$_{ب}$ ا × لو$_{ا}$ حـ = لو$_{ب}$ حـ

④ $\int \frac{\text{لو}_{هـ} س^{٤}}{س \text{ لو}_{هـ} س^{٥}} \, ء س = \int \frac{٤ \text{ لو}_{هـ} س}{٥ س \text{ لو}_{هـ} س} \, ء س = \frac{٤}{٥} \int \frac{١}{س} \, ء س$

$= \frac{٤}{٥} \text{ لو}_{هـ} |س| + ث$

⑤ $\int \frac{(٤ س - ١)^{٢}}{٢ س} \, ء س = \int \frac{١٦ س^{٢} - ٨ س + ١}{٢ س} \, ء س$

$= \int \left(٨ س - ٤ + \frac{١}{٢ س} \right) ء س$

$= ٤ س^{٢} - ٤ س + \frac{١}{٢} \text{ لو}_{هـ} |س| + ث$

⑥ $\int \left(\frac{٣ هـ}{س} + \frac{س}{٣ هـ} \right) ء س = ٣ هـ \text{ لو}_{هـ} |س| + \frac{١}{٦ هـ} س^{٢} + ث$

⑦ $\int \frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٥ س} \, ء س = \int \frac{(س + ٥)(س - ٥)}{س (س - ٥)} \, ء س$

$= \int \frac{س + ٥}{س} \, ء س = \int \left(١ + \frac{٥}{س} \right) ء س$

$= س + ٥ \text{ لو}_{هـ} |س| + ث$

⑧ ∵ د (س) = $س^{٢} + ٤ س + ٣$ ، د′ (س) = $٢ س + ٤ = ٢ (س + ٢)$

$\int \frac{س + ٢}{س^{٢} + ٤ س + ٣} \, ء س = \frac{١}{٢} \int \frac{٢ (س + ٢)}{س^{٢} + ٤ س + ٣} \, ء س$

$= \frac{١}{٢} \text{ لو}_{هـ} |س^{٢} + ٤ س + ٣| + ث$

مثال ٥

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int$ طا س ء س

② $\int$ طتا س ء س

③ $\int$ قا س ء س

④ $\int$ قتا س ء س

الحل

① ∵ $\int$ طا س ء س = $\int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \, ء س = - \int \frac{(- \text{جا س})}{\text{جتا س}} \, ء س$

«لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= - \text{ لو}_{هـ} |\text{جتا س}| + ث = \text{ لو}_{هـ} |\text{قا س}| + ث$

② $\int$ طا س ء س = $\int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ء س «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

= لو$_{هـ}$ | جا س | + ث

③ $\int$ ق$_{أ}$ س ء س = $\int \frac{\text{ق}_{أ}\text{ س (ق}_{أ}\text{ س + ط}_{أ}\text{ س)}}{\text{(ق}_{أ}\text{ س + ط}_{أ}\text{ س)}}$ ء س «بالضرب بسطًا ومقامًا فى (ق$_{أ}$ س + ط$_{أ}$ س)»

= $\int \frac{\text{ق}_{أ}\text{ س ط}_{أ}\text{ س + ق}_{أ}^{٢}\text{ س}}{\text{(ق}_{أ}\text{ س + ط}_{أ}\text{ س)}}$ ء س «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

= لو$_{هـ}$ | ق$_{أ}$ س + ط$_{أ}$ س | + ث

④ $\int$ ق$_{ب}$ س ء س = $\int \frac{\text{ق}_{ب}\text{ س (ق}_{ب}\text{ س + ط}_{ب}\text{ س)}}{\text{ق}_{ب}\text{ س + ط}_{ب}\text{ س}}$ ء س

«بالضرب بسطًا ومقامًا فى (ق$_{ب}$ س + ط$_{ب}$ س)»

= $\int \frac{\text{ق}_{ب}\text{ س ط}_{ب}\text{ س + ق}_{ب}^{٢}\text{ س}}{\text{ق}_{ب}\text{ س + ط}_{ب}\text{ س}}$ ء س

= − $\int \frac{-\text{ق}_{ب}\text{ س ط}_{ب}\text{ س − ق}_{ب}^{٢}\text{ س}}{\text{ق}_{ب}\text{ س + ط}_{ب}\text{ س}}$ ء س «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

= − لو$_{هـ}$ | ق$_{ب}$ س + ط$_{ب}$ س | + ث

مثال ٦

إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{٥\text{ س} + ٣}{\text{س}}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (هـ ، ٥ هـ + ٧) أوجد معادلة المنحنى.

الحل

∵ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٥\text{ س} + ٣}{\text{س}}$

∴ $\int \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ ء س = $\int \frac{٥\text{ س} + ٣}{\text{س}}$ ء س = $\int \left(٥ + \frac{٣}{\text{س}}\right)$ ء س

∴ ص = ٥ س + ٣ لو$_{هـ}$ | س | + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (هـ ، ٥ هـ + ٧)

∴ ٥ هـ + ٧ = ٥ هـ + ٣ لو$_{هـ}$ هـ + ث ∴ ث = ٤

∴ معادلة المنحنى هى : ص = ٥ س + ٣ لو$_{هـ}$ | س | + ٤

مثال ٧

إذا كان معدل التغير فى مساحة سطح صفيحة م (بالسنتيمتر المربع) بالنسبة للزمن ن (بالثانية) يتعين بالعلاقة $\frac{ء م}{ء ن} = هـ^{-٠,٢ ن}$ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوى ١٤٠ سم^{٢}

أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد $\frac{١}{٣}$ دقيقة.

الحل

$\because \frac{ء م}{ء ن} = هـ^{-٠,٢ ن}$

$\therefore \int \frac{ء م}{ء ن} ء ن = \int هـ^{-٠,٢ ن} ء ن$ $\quad \therefore م = -٥ هـ^{-٠,٢ ن} + ث$

عند بداية التغير ن = صفر ، م = ١٤٠ $\quad \therefore ث = ١٤٥$

$\therefore م = -٥ هـ^{-٠,٢ ن} + ١٤٥$ $\quad$ بعد $\frac{١}{٣}$ دقيقة أى ٢٠ ثانية

م = $(-٥ هـ^{-٤} + ١٤٥)$ سم^{٢}

مثال ٨

أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int \frac{حتا س - جا س}{حتا س + جا س} ء س$

② $\int \frac{٦}{س لو_هـ س^{٣}} ء س$

③ $\int \frac{٦}{س} (لو_هـ س)^{٥} ء س$

④ $\int \frac{\sqrt{٥ + لو_هـ س}}{س} ء س$

⑤ $\int \left(\frac{لو س}{س}\right) ء س$

الحل

① نضع د (س) = حتا س + جا س

$\therefore$ د$'$ (س) = − جا س + حتا س = حتا س − جا س

$\therefore \int \frac{حتا س - جا س}{حتا س + جا س} ء س = لو_هـ |حتا س + جا س| + ث$

للحظ أن

البسط هو تفاضل المقام

② $\int \frac{٦}{س \text{ لو}_{هـ}^{٣} س} \, ء س = \int \frac{٦}{٣ س \text{ لو}_{هـ} س} \, ء س = ٢ \int \frac{١}{س \text{ لو}_{هـ} س} \, ء س$

وبوضع د (س) = $\text{لو}_{هـ} س$ ∴ د′ (س) = $\frac{١}{س}$

∴ التكامل = $٢ \int \frac{\frac{١}{س}}{\text{لو}_{هـ} س} \, ء س = ٢ \text{ لو}_{هـ} |\text{لو}_{هـ} س| + ث$

③ بوضع د (س) = $\text{لو}_{هـ} س$ ∴ د′ (س) = $\frac{١}{س}$

∴ $\int \frac{٦}{س} (\text{لو}_{هـ} س)^{٥} \, ء س = ٦ \int \frac{١}{س} (\text{لو}_{هـ} س)^{٥} \, ء س$

$= \frac{٦ (\text{لو}_{هـ} س)^{٦}}{٦} + ث = (\text{لو}_{هـ} س)^{٦} + ث$

④ بوضع د (س) = ٥ + $\text{لو}_{هـ} س$ ∴ د′ (س) = $\frac{١}{س}$

∴ $\int \frac{\sqrt{٥ + \text{لو}_{هـ} س}}{س} \, ء س = \int \frac{١}{س} (٥ + \text{لو}_{هـ} س)^{\frac{١}{٢}} \, ء س$

$= \frac{٢}{٣} (٥ + \text{لو}_{هـ} س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

⑤ ∵ لو س = $\frac{\text{لو}_{هـ} س}{\text{لو}_{هـ} ١٠}$

∴ $\int \frac{\text{لو} س}{س} \, ء س = \int \frac{\text{لو}_{هـ} س}{س \text{ لو}_{هـ} ١٠} \, ء س = \frac{١}{\text{لو}_{هـ} ١٠} \int \frac{\text{لو}_{هـ} س}{س} \, ء س$

$= \frac{١}{\text{لو}_{هـ} ١٠} \times \frac{١}{٢} (\text{لو}_{هـ} س)^{٢} + ث = \frac{١}{٢ \text{ لو}_{هـ} ١٠} (\text{لو}_{هـ} س)^{٢} + ث$

تمارين 8

على تكامل يتضمن الدوال الأسية واللوغاريتمية

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد كلًا مما يأتي :

(١) $\int هـ^{٤س}\,د س$

(٢) $\int هـ^{-س}\,د س$

(٣) $\int هـ^{-\frac{٣}{٤}ص}\,د ص$

(٤) $\int -٦هـ^{٠,٢ص}\,د ص$

(٥) $\int ٣\sqrt{٢}\,هـ^{-\sqrt{٢}ن}\,د ن$

(٦) $\int -هـ^{-٥ع}\,د ع$

(٧) $\int \pi هـ^{س}\,د س$

(٨) $\int هـ^{١-٣س}\,د س$

(٩) $\int \frac{٧}{٣}هـ^{٣س-٤}\,د س$

(١٠) $\int هـ^{٧-٤س}\,د س$

(١١) $\int ٥^{س}\,د س$

(١٢) $\int ٢^{-٥س}\,د س$

٢ أوجد كلًا مما يأتي :

(١) $\int (٤س - ٢هـ^{س})\,د س$

(٢) $\int (٣س^{٢} - ٤هـ^{٢س})\,د س$

(٣) $\int (١ + ٤هـ^{-٣ص})\,د س$

(٤) $\int (هـ^{٢ك} + ٤ك)\,د ك$

(٥) $\int (٢س^{٢} + ما٢س - ٤هـ^{٣س})\,د س$

(٦) $\int (هـ^{٣س} + ٣ما^{س} - ٤س^{٣} + ٢)\,د س$

(٧) $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{٢}\right)\,د س$

(٨) $\int \left(\frac{هـ^{س} + ٣}{هـ^{س}}\right)\,د س$

(٩) $\int \left(\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س}}\right)\,د س$

(١٠) $\int \left(\frac{٣هـ^{س} - ٢هـ^{٢-س}}{٢هـ^{س}}\right)\,د س$

(١١) $\int \left(\frac{هـ^{٣س} + ٢هـ^{٢س} + ٤}{هـ^{س}}\right)\,د س$

(١٢) $\int \left(هـ^{س} + \frac{١}{هـ^{س}}\right)^{٢}\,د س$

(١٣) $\int ٢هـ^{س}(هـ^{س} + ١)^{٢}\,د س$

(١٤) $\int \left(\frac{هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} - ٨}{هـ^{س} - ٤}\right)\,د س$

(١٥) $\int (س^{٢}هـ + هـ^{٣س})\,د س$

(١٦) $\int (\pi^{٤} + \pi^{س})\,د س$

٣ أوجد كلًا مما يأتي :

(١) $\int ٢س\,هـ^{س^{٢}+١٥}\,د س$

(٢) $\int ٤س\,هـ^{س^{٢}+١}\,د س$

③ $\int س^{٢} هـ^{س^{٣}+١}$ ء س

④ $\int (س - ٣) هـ^{س^{٢}-٦س-٥}$ ء س

⑤ $\int س^{٢} (٤س - ٣) هـ^{س^{٤}-س^{٣}}$ ء س

⑥ $\int (١ + جتاس) هـ^{(س - جتاس)}$ ء س

⑦ $\int جاس \times هـ^{جتاس}$ ء س

⑧ $\int (جتاس هـ^{جاس} + ٣س^{٢})$ ء س

⑨ $\int \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}}$ ء س

⑩ $\int \frac{ء س}{\sqrt{س} هـ^{\sqrt{س}}}$

⑪ $\int \frac{هـ^{س}}{\sqrt{١ + ٢هـ^{س}}}$ ء س

⑫ $\int ٩ (هـ^{س} + ١)^{٨} \times هـ^{س}$ ء س

⑬ $\int ٢ جاس جتاس$ ء س

⑭ $\int ٧ جتاس جاس$ ء س

٤ أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int \frac{٢}{س}$ ء س

② $\int \frac{١}{٣س}$ ء س

③ $\int \frac{١}{س + ١}$ ء س

④ $\int (س + \frac{١}{س})$ ء س

⑤ $\int (\frac{٤}{س} - هـ^{-س})$ ء س

⑥ $\int (\frac{٣}{س} + ٤هـ^{-٢س})$ ء س

⑦ $\int \frac{٤}{٣س لو_{هـ} ٥}$ ء س

⑧ $\int \frac{لو_{هـ} ٣}{س}$ ء س

⑨ $\int \frac{لو_{هـ} س^{٢}}{س لو_{هـ} س^{٣}}$ ء س

⑩ $\int \frac{لو_{هـ} س}{س لو_{هـ} \sqrt{س}}$ ء س

⑪ $\int (\frac{٢هـ}{س} + \frac{س}{هـ})$ ء س

⑫ $\int (\frac{هـ^{٣}}{س} + س لو_{هـ} ٣)$ ء س

⑬ $\int (٣هـ^{-س} + \frac{\pi}{س})$ ء س

⑭ $\int (٣س^{٢} + \frac{٥}{س})$ ء س

⑮ $\int (س^{٦} + ٥هـ^{س} + \frac{١}{س})$ ء س

⑯ $\int (جاس - \frac{٢}{س} + هـ^{س})$ ء س

⑰ $\int (هـ^{س} + ٣س + \frac{١}{س})$ ء س

⑱ $\int (\frac{٥س + ٧}{س} + هـ^{س})$ ء س

(١٩) $\int \left(\frac{-٣}{س} + ٤ هـ^{-٠,٤ س} + هـ^{٠,١} \right) د س$

(٢٠) $\int \frac{٦ س^{٢} - ٥}{٣ س} د س$

(٢١) $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٢ س} د س$

(٢٢) $\int \left(\sqrt{س} - \frac{٣}{\sqrt{س}} \right)^{٢} د س$

(٢٣) $\int \frac{(٢ س - ١)^{٢}}{٣ س} د س$

(٢٤) $\int \frac{٤ هـ^{س} + س هـ^{٢ س}}{س هـ^{س}} د س$

٥ أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\int \frac{٤}{١ + ٢ س} د س$

(٢) $\int \frac{د س}{٤ س - ١}$

(٣) $\int \frac{س}{س^{٢} + ١} د س$

(٤) $\int \frac{٣ س}{س^{٢} - ١} د س$

(٥) $\int \frac{٩ + ٦ س}{س^{٢} + ٣ س} د س$

(٦) $\int \frac{س + ١}{س^{٢} + ٢ س + ٧} د س$

(٧) $\int \frac{٢ س + ٣}{س^{٢} + ٣ س - ٢} د س$

(٨) $\int \frac{٣ س^{٢} - ٥}{س^{٣} - ٥ س + ١} د س$

(٩) $\int \frac{٣ س^{٢} + س}{٢ س^{٣} + س^{٢} - ١} د س$

(١٠) $\int \frac{س^{٢} + ٢}{س^{٣} + ٦ س + ١} د س$

(١١) $\int \frac{٢ س - ١}{س - ١} د س$

(١٢) $\int \frac{س^{٢}}{س + ١} د س$

(١٣) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ٣} د س$

(١٤) $\int \frac{هـ^{٢ س}}{هـ^{٢ س} - ٢} د س$

٦ أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\int طا س د س$

(٢) $\int طتا س د س$

(٣) $\int قا س د س$

(٤) $\int قتا س د س$

(٥) $\int \frac{جتا س}{٢ + جا س} د س$

(٦) $\int \frac{جا س}{١ + جتا س} د س$

(٧) $\int \frac{قا^{٢} س}{طا س} د س$

(٨) $\int \frac{قتا^{٢} س}{طتا س} د س$

(٩) $\int \frac{\text{جا}س + \text{جتا}س}{\text{جا}س - \text{جتا}س} \, \text{د}س$

(١٠) $\int \frac{١ - \text{ظا}س}{١ + \text{ظا}س} \, \text{د}س$

(١١) $\int \frac{\text{قا}س \, \text{ظا}س}{\text{قا}س - ١} \, \text{د}س$

(١٢) $\int \frac{\text{جا}٢س + ٢\,\text{جتا}س}{\text{جا}^{٢}س + ٢\,\text{جا}س - ١} \, \text{د}س$

(١٣) $\int \text{ظا}٦س \, \text{د}س$

(١٤) $\int \text{ظتا}^{٣}س \, \text{د}س$

(١٥) $\int \frac{١ + \text{ظا}س}{س + \text{لو}_{هـ} \text{قا}س} \, \text{د}س$

(١٦) $\int \frac{١ + \text{ظتا}س}{س + \text{لو}_{هـ} \text{جا}س} \, \text{د}س$

(١٧) $\int \frac{\text{جا}٢س}{\text{جا}٤س} \, \text{د}س$

(١٨) $\int \frac{س هـ^{-١} + هـ^{س-١}}{س هـ + هـ^{س}} \, \text{د}س$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\int ٤س \, هـ^{س^{٢}} \, \text{د}س$ تساوى

(أ) $\frac{١}{٢} هـ^{س^{٢}} + ث$ (ب) $هـ^{س^{٢}} + ث$ (جـ) $٢ هـ^{س^{٢}} + ث$ (د) $٤ هـ^{س^{٢}} + ث$

(٢) $\int \text{ظا}\theta \, \text{د}\theta$ تساوى

(أ) $- \text{لو}_{هـ} |\text{جتا}\theta| + ث$ (ب) $- \text{لو}_{هـ} \text{جتا}\theta + ث$

(جـ) $\text{لو}_{هـ} \text{جتا}\theta + ث$ (د) $|\text{لو}_{هـ} \text{جتا}\theta| + ث$

(٣) $\int \frac{\text{لو}_{هـ} س^{٢}}{\text{لو}_{هـ} س} \, \text{د}س$ تساوى

(أ) $\frac{س}{٢} + ث$ (ب) $\frac{١}{س} + ث$ (جـ) $٢س + ث$ (د) $\text{لو}_{هـ} |س| + ث$

(٤) $\int \frac{١}{س \, \text{لو}_{هـ} س^{٣}} \, \text{د}س$ تساوى

(أ) $٣ \, \text{لو}_{هـ} |س| + ث$ (ب) $٣ \, \text{لو}_{هـ} |\text{لو}_{هـ} س| + ث$

(جـ) $\frac{١}{٣} \, \text{لو}_{هـ} |س| + ث$ (د) $\frac{١}{٣} \, \text{لو}_{هـ} |\text{لو}_{هـ} س| + ث$

(٥) إذا كان د$'$ (س) = $\frac{١}{٢}$ [$هـ^{س} + هـ^{-س}$] ، د (٠) = ١ ، د$'$ (٠) = ٠

فإن د (س) تساوى

(أ) – د$'$ (س) (ب) د$'$ (س) (جـ) – د$''$ (س) (د) د$''$ (س)

⑥ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى ٤ هـ^{٢س} ، د (٠) = ٢ فإن : د (-٢) تساوى

(أ) ٤ (ب) ٤ هـ$^{-٤}$ (جـ) ٢ هـ$^{-٤}$ (د) ٢ هـ

⑦ $\int \frac{س + ٢}{س + ١}$ ء س = ...

(أ) ١ + لو$_{هـ}$ (س + ١) + ث (ب) س - لو$_{هـ}$ | س + ١ | + ث

(جـ) س + لو | س + ٢ | + ث (د) س + لو$_{هـ}$ | س + ١ | + ث

⑧ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى ٧ - ٢ هـ^{س} وكان د (لو$_{هـ}$ ٢) = ٣ ، **أوجد :** د (س)

«د (س) = ٧س - ٢ هـ^{س} + ٧ لو$_{هـ}$ ٢»

⑨ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة (س ، ص) يساوى ٢ هـ$^{-\frac{١}{٢}س}$ د (٠) = ١ **أوجد :** د (٣)

«٥ - ٤ هـ$^{-\frac{٣}{٢}}$»

⑩ ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{١}{٢س - هـ}$ وكان د (هـ) = $\frac{١}{٢}$ **أوجد :** د (٢ هـ)

«$\frac{١}{٢}$ (١ + لو$_{هـ}$ ٣)»

⑪ منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{٣س + ٢}{س}$ أوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمر بالنقطة (هـ ، ٣ هـ + ٥)

«ص = ٣س + ٢ لو$_{هـ}$ | س | + ٣»

⑫ إذا كان معدل التغير فى مساحة سطح صفيحة م (بالسنتيمتر المربع) بالنسبة للزمن ن (بالثانية) يتعين بالعلاقة $\frac{ء م}{ء ن}$ = هـ$^{-٠,١ ن}$ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير تساوى ٨٠ سم^{٢} ، أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد ١٠ ثوانٍ.

«(٩٠ - ١٠ هـ$^{-١}$) سم^{٢}»

⑬ إذا كان معدل تغير مبيعات أحد المصانع يتناسب عكسيًا مع الزمن بالأسابيع، وكانت مبيعات المصنع بعد أسبوعين و٤ أسابيع هى على الترتيب ٢٠٠ ، ٣٠٠ وحدة أوجد مبيعات المصنع بعد ٨ أسابيع.

«٤٠٠ وحدة»

١٤ إذا كان ميل المماس عند أى نقطة (س ، ص) على منحنى الدالة د يتناسب عكسيًا مع س وكان ميل المماس يساوى ٢ عند س = ٤ ، ص = ٢ أوجد ص بدلالة س

«ص = ٨ لو$_{\text{ه}}$ | س | + ٢ − ٨ لو$_{\text{ه}}$ ٤»

١٥ أوجد كلًا مما يأتى :

① $\int \frac{١}{س \text{ لو}_{\text{ه}} س} \, \text{د}س$

② $\int \frac{٤}{س \text{ لو}_{\text{ه}} ٣س} \, \text{د}س$

③ $\int \frac{(\text{لو}_{\text{ه}} س)^{٢}}{س} \, \text{د}س$

④ $\int \frac{(\text{لو} س)^{٢}}{س} \, \text{د}س$

⑤ $\int \frac{(١ + \text{لو}_{\text{ه}} س)^{٢}}{س} \, \text{د}س$

⑥ $\int \frac{٢س}{(س + ١)^{٢}} \, \text{د}س$

⑦ $\int \frac{\sqrt{١ + \text{لو}_{\text{ه}} س}}{س} \, \text{د}س$

⑧ $\int \frac{س + ١}{\sqrt{س^{٢} + س + \text{لو}_{\text{ه}} س}} \, \text{د}س$

⑨ $\int \frac{١}{س} \text{ جتا} (\text{لو}_{\text{ه}} س) \, \text{د}س$

⑩ $\int ٣^{\text{لو}_{٣} س} \, \text{د}س$

⑪ $\int \left(\frac{٣}{س} - \frac{٢س - ١}{س^{٢} - س + ٢} \right) \text{د}س$

⑫ $\int \frac{١}{س} \text{ لو}_{\text{ه}} (\text{جا لو}_{\text{ه}} س) \text{ طا} (\text{لو}_{\text{ه}} س) \, \text{د}س$

⑬ $\int (س^{٣} + ٣^{س} + \text{ه}^{س} . ٣^{س} + \text{جا} \alpha) \, \text{د}س$

⑭ $\int (\text{ه}^{س \text{ لو}_{\text{ه}} ٣} + \text{ه}^{٣ \text{ لو}_{\text{ه}} س} + \text{ه}^{٣ \text{ لو}_{\text{ه}} ٣}) \, \text{د}س$